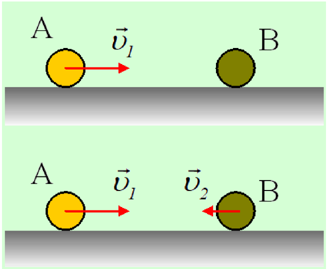
Δύο ελαστικές κρούσεις και η μηδενική ταχύτητα



Μια σφαίρα Α μάζας m= 1kg κινείται (χωρίς να περιστρέφεται) με ταχύτητα υ_1=5m/s, σε λείο οριζόντιο επίπεδο και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με δεύτερη σφαίρα Β, ίσης ακτίνας και μάζας Μ=4kg η οποία είναι ακίνητη.

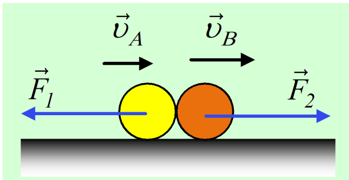
i) Να αποδείξετε ότι κάποια στιγμή t_1 στη διάρκεια της κρούσης μηδενίζεται η ταχύτητα της Α σφαίρας.

ii) Πόση είναι η μείωση ΔΚ της κινητικής ενέργειας του συστήματος, τη στιγμή t_1;

iii) Τι ποσοστό της κινητικής ενέργειας της Α σφαίρας, μεταφέρεται τελικά στην σφαίρα Β;

iv) Ποιες οι αντίστοιχες απαντήσεις στα παραπάνω ερωτήματα, αν η Β σφαίρα, πριν την κρούση κινείται στην ίδια ευθεία με αντίθετη φορά με ταχύτητα, μέτρου $|\upsilon_2|$= 1,25m/s, όπως στο δεύτερο σχήμα;

Απάντηση:



i) Θεωρώντας την προς τα δεξιά κατεύθυνση ως θετική, θα έχουμε για την ταχύτητα της Α σφαίρας μετά την κρούση:

$$\upsilon_1' = \frac{m-M}{m+M}\upsilon_1 = \frac{1-4}{1+4}5m/s = -3m/s$$

Αλλά αν μετά την κρούση η Α σφαίρα κινείται προς τα αριστερά, τότε κάποια στιγμή στη διάρκεια της κρούσης η ταχύτητά της μηδενίστηκε. Εξάλλου αν σχεδιάσουμε τις ασκούμενες δυνάμεις λόγω κρούσης στα δυο σώματα, όπως στο σχήμα, στη διάρκεια της κρούσης η Α σφαίρα δέχεται δύναμης κρούσης F_1, όπως στο σχήμα, η οποία μεταβάλει την ταχύτητα από 5m/s προς τα δεξιά σε 3m/s με φορά προς τα αριστερά. Προφανώς για να συμβεί αυτό, κάποια στιγμή η τιμή της ταχύτητας μηδενίστηκε.

ii) Η **μείωση** της κινητικής ενέργειας του συστήματος μεταξύ μιας στιγμής t_o πριν την κρούση και της στιγμής t_1 είναι ίση:

$$\Delta K = K_{\alpha\rho\chi} - K_{t_1} = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 - \left(\frac{1}{2}m\upsilon_{t1}^2 + \frac{1}{2}M\upsilon_{2t_1}^2\right)$$

Όμως από την **διατήρηση** της ορμής στο παραπάνω χρονικό διάστημα παίρνουμε:

$$\vec{P}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{P}_{t_1} \xrightarrow{\alpha\lambda\gamma\varepsilon\beta\rho\iota\kappa\acute{\alpha}} m\upsilon_1 + 0 = 0 + M\upsilon_{2t_1} \rightarrow$$

$$\upsilon_{2t_1} = \frac{m\upsilon_1}{M} = \frac{1\cdot 5}{4}m/s = 1{,}25m/s \rightarrow$$

$$\Delta K = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 - \left(0 + \frac{1}{2}M\upsilon_{2t_1}^2\right) = \frac{1}{2}1\cdot 5^2 J - \frac{1}{2}4\cdot 1{,}25^2 J \approx 9{,}34J$$

Τι απέγινε η παραπάνω ενέργεια των 9,34J; Η παραπάνω απώλεια της κινητικής ενέργειας, έχει μετατραπεί σε ελαστική δυναμική ενέργεια παραμόρφωσης των δύο σφαιρών, η οποία στη συνέχεια θα μετατραπεί ξανά σε κινητική ενέργεια των δύο σωμάτων στη συνέχεια…

iii) Μετά την κρούση η σφαίρα Β θα έχει ταχύτητα:

$$\upsilon_2' = \frac{2m}{m+M}\upsilon_1 = \frac{2\cdot 1}{1+4}5m/s = 2m/s$$

Οπότε το ποσοστό της κινητικής ενέργειας της Α σφαίρας, το οποίο μεταφέρεται στη σφαίρα Β, είναι:

$$\pi = \frac{K_2'}{K_1}100\% = \frac{\frac{1}{2}M\upsilon_2'^2}{\frac{1}{2}m\upsilon_1^2}100\% = \frac{4\cdot 2^2}{1\cdot 5^2}100\% = 64\%$$

iv) Δουλεύοντας με τον ίδιο τρόπο και στην δεύτερη περίπτωση, όπου η σφαίρα Β κινείται με ταχύτητα (αλγεβρικής τιμής υ_2=-1,25m/s), θα πάρουμε:

α) Για την ταχύτητα της σφαίρας Α μετά την κρούση:

$$\upsilon_1' = \frac{m-M}{m+M}\upsilon_1 + \frac{2M}{m+M}\upsilon_2 = \frac{1-4}{1+4}5m/s + \frac{2\cdot 4}{1+4}(-1,25)m/s = -5m/s$$

Άρα και εδώ κάποια στιγμή t_2 μηδενίστηκε η ταχύτητα της Α σφαίρας.

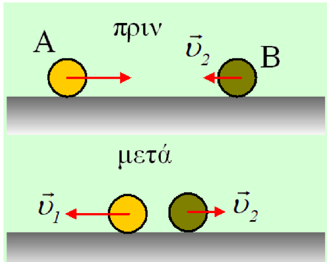
β) Από την **διατήρηση** της ορμής από μια στιγμή πριν την κρούση, μέχρι τη στιγμή t_2 παίρνουμε:

$$\vec{P}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{P}_{t_2} \xrightarrow{\alpha\lambda\gamma\varepsilon\beta\rho\iota\kappa\acute{\alpha}} m\upsilon_1 + M\upsilon_2 = 0 + M\upsilon_{2t_2} \rightarrow$$
$$1\cdot 5 + 4\cdot(-1,25) = 4\cdot\upsilon_{2t_2} \rightarrow \upsilon_{2t_2} = 0$$

Δηλαδή τη στιγμή που μηδενίζεται η ταχύτητα της Α σφαίρας, μηδενίζεται και η ταχύτητα της Β. Αλλά τότε η απώλεια της κινητικής ενέργειας, είναι ίση με την αρχική κινητική ενέργεια των δύο σφαιρών:

$$\Delta K = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}M\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}1\cdot 5^2 J + \frac{1}{2}4\cdot 1,25^2 J \approx 15,6J$$

γ) Μετά την κρούση η σφαίρα Β θα έχει ταχύτητα:



Οι δυο σφαίρες ανακλώνται, χωρίς να αλλάζουν τα μέτρα των ταχυτήτων τους .

$$\upsilon_2' = \frac{2m}{m+M}\upsilon_1 + \frac{M-m}{m+M}\upsilon_2 \rightarrow$$
$$\upsilon_2' = \frac{2\cdot 1}{1+4}5m/s + \frac{4-1}{1+4}(-1,25)m/s = 1,25m/s$$

Δηλαδή και η σφαίρα Β ανακλάται με ταχύτητα ίσου μέτρου, πράγμα που σημαίνει και με την ίδια κινητική ενέργεια που είχε πριν την κρούση. Αλλά τότε η σφαίρα Β δεν πήρε ενέργεια από την Α σφαίρα στη διάρκεια της κρούσης και το ζητούμενο ποσοστό είναι μηδενικό! Βέβαια υπολογίζοντας στο ερώτημα α) την ταχύτητα της Α σφαίρας $\upsilon_1' = -5m/s$, βλέπουμε ότι δεν μετεβλήθη η κινητική ενέργεια της Α σφαίρας, οπότε δεν άλλαξε και η αντίστοιχη της Β.

dmargaris@gmail.com