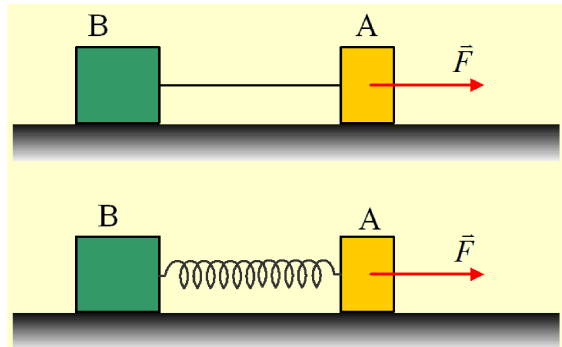


## Νήμα- Ελατήριο. Ομοιότητες και Διαφορές

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμούν δυο σώματα A και B, με μάζες  $m_1=1\text{kg}$  και  $m_2=4\text{kg}$ , αντίστοιχα, τα οποία συνδέονται μεταξύ τους i) με ένα αβαρές μη εκτατό νήμα και ii) με ένα ιδανικό ελατήριο, με σταθερά  $k=20\text{N/m}$  και φυσικό μήκος  $l_0=0,3\text{m}$ . Σε μια στιγμή ασκούμε στο σώμα A μια σταθερή οριζόντια δύναμη, μέτρου  $F=20\text{N}$ , όπως στα σχήματα και τα σώματα κινούνται προς τα δεξιά.



i) Για την πρώτη περίπτωση, για τη στιγμή  $t_1$  που το σώμα

A έχει ταχύτητα  $u_1=4\text{m/s}$ , ζητούνται:

α) Η ταχύτητα του σώματος B και ο ρυθμός με τον οποίο η δύναμη μεταφέρει ενέργεια στο σώμα A.

β) Ποια η τάση του νήματος; Να υπολογιστεί η ισχύς της τάσης του νήματος που ασκείται στο σώμα A, καθώς και ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του A σώματος

γ) Η ισχύς της τάσης του νήματος που ασκείται στο σώμα B, καθώς και ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της κινητικής του ενέργειας.

ii) Ποιες οι αντίστοιχες απαντήσεις στα παραπάνω υποερωτήματα, για την δεύτερη περίπτωση, με το ελατήριο, για τη στιγμή  $t_2$  που το σώμα A έχει ταχύτητα  $u_1=4,8\text{m/s}$ , ενώ το ελατήριο έχει μήκος  $l=0,8\text{m}$ ;

Για την απάντησή σας στο γ) ερώτημα, δίνεται ότι το σώμα B τη στιγμή αυτή έχει ταχύτητα  $u_2=1,1\text{m/s}$ .

Εξάλλου εδώ προφανώς δεν μιλάμε για «τάση» του νήματος, αλλά για δύναμη από το ελατήριο.

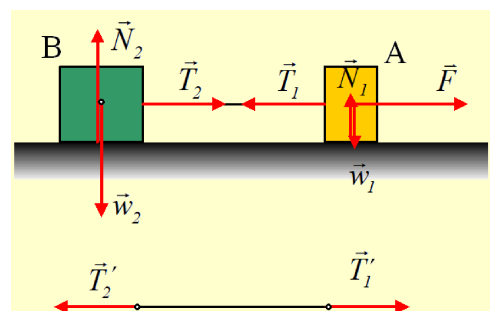
Να συγκρίνετε και να σχολιάσετε τα αποτελέσματα.

### Απάντηση:

i) Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα, όπου το νήμα ασκεί στα δυο σώματα δυνάμεις  $T_1$  και  $T_2$ , ίσου μέτρου  $T$ , με αντίθετη κατεύθυνση. Τις δυνάμεις αυτές αποκαλούμε «τάση του νήματος». Γιατί αυτές οι δυνάμεις που ασκούνται στα δυο σώματα έχουν ίσα μέτρα; Γιατί αν πάρουμε το νήμα (κάτω σχήμα), δέχεται τις αντιδράσεις των  $T_1$  και  $T_2$ , οπότε αφού το νήμα είναι «αβαρές» (αμελητέας μάζας καλύτερα...) θα ισχύει:

$$T'_1 - T'_2 = m_v \alpha = 0 \xrightarrow{m_v \rightarrow 0} T'_1 = T'_2 \rightarrow T_1 = T_2 = T$$

α) Αφού το νήμα είναι «μη εκτατό», σε μετάφραση! σταθερού μήκους, τα δυο σώματα κινούνται μαζί, αφού η απόσταση μεταξύ τους παραμένει σταθερή, με αποτέλεσμα και το B σώμα να έχει την ίδια ταχύτητα, με το A,  $u=4\text{m/s}$ . Όσον αφορά για τον ρυθμό με τον οποίο η δύναμη μεταφέρει ενέργεια στο A σώμα, αυτός ισούται με την ισχύ της δύναμης την στιγμή  $t_1$ :



$$P_{F_1} = F \cdot u \cdot \cos 0^\circ = F \cdot u = 20 \cdot 4 \text{ J/s} = 80 \text{ J/s}$$

β) Αφού τα σώματα κινούνται μαζί, θα έχουν και την ίδια επιτάχυνση. Έτσι από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα παίρνουμε

$$\Sigma F_A = m_1 a \rightarrow F - T = m_1 a \quad (1)$$

$$\Sigma F_B = m_2 a \rightarrow T = m_2 a \quad (2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) παίρνουμε:

$$F = (m_1 + m_2) a \rightarrow a = \frac{F}{(m_1 + m_2)} = \frac{20}{1+4} \text{ m/s}^2 = 4 \text{ m/s}^2 \rightarrow$$

$$T = m_2 a = 4 \cdot 4 \text{ N} = 16 \text{ N}$$

Για την ισχύ της  $T_1$  έχουμε:

$$P_{T_1} = T \cdot u \cdot \cos 180^\circ = -T \cdot u = -16 \cdot 4 \text{ J/s} = -64 \text{ J/s} \text{ ενώ}$$

$$\frac{dK_1}{dt} = \frac{dW_{\text{ολ.1}}}{dt} = \frac{|\Sigma F| \cdot |dx| \cdot \cos 0^\circ}{dt} = m_1 a u = 1 \cdot 4 \cdot 4 \text{ J/s} = 16 \text{ J/s}$$

Αξιίζει να παρατηρήσουμε ότι η δύναμη  $F$  προσφέρει ενέργεια στο  $A$  σώμα με ρυθμό  $80 \text{ J/s}$ , από αυτά τα  $64 \text{ J/s}$  αφαιρούνται μέσω του νήματος, οπότε τα υπόλοιπα  $16 \text{ J/s}$ , αυξάνουν την κινητική του ενέργεια.

γ) Πάμε στο  $B$  σώμα. Για την ισχύ της  $T_2$  και τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής του ενέργειας, θα έχουμε:

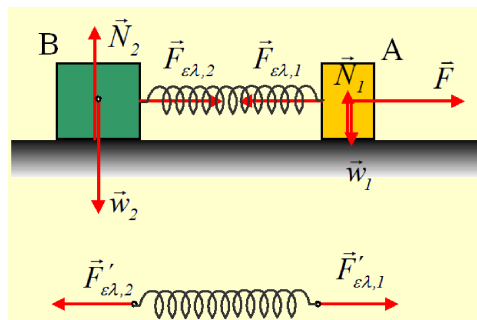
$$P_{T_2} = T \cdot u \cdot \cos 0^\circ = T \cdot u = 16 \cdot 4 \text{ J/s} = 64 \text{ J/s} \text{ ενώ}$$

$$\frac{dK_2}{dt} = \frac{dW_{\text{ολ.2}}}{dt} = \frac{|\Sigma F| \cdot |dx| \cdot \cos 0^\circ}{dt} = m_2 a u = 4 \cdot 4 \cdot 4 \text{ J/s} = 64 \text{ J/s}$$

Προσέξτε ότι όση ενέργεια αφαιρέσει το νήμα από το  $A$  σώμα, τόση έδωσε στο σώμα  $B$ , αυξάνοντας την κινητική του ενέργεια. Το νήμα απλά μετέφερε την ενέργεια.

Το ίδιο πράγμα θα είχαμε αν το σώμα  $B$  είχε δεθεί, είχε καρφωθεί, είχε συγκολληθεί με το σώμα  $A$ ...

- ii) Σκεπτόμενοι με τον ίδιο τρόπο και στην περίπτωση του ελατηρίου, σχεδιάζουμε τις δυνάμεις στα δυο σώματα, παίρνοντας το διπλανό σχήμα. Και πάλι το ελατήριο ασκεί αντίθετες δυνάμεις στα δυο σώματα, όπου την δύναμη τώρα δεν την αποκαλούμε τάση, αλλά δύναμη του ελατηρίου, που απλά το μέτρο της υπακούει στο νόμο του Hooke  $|F_{\text{ελ}}| = F_{\text{ελ}} = k \Delta l$ . Ας επισημάνουμε ότι και το ιδανικό ελατήριο είναι «αβαρές», άμαζο ή αμελητέας μάζας, αν προτιμάτε.



- α) Για την ταχύτητα του  $B$  σώματος τη στιγμή  $t_2$ , δεν μπορούμε να ξέρουμε, αφού το ελατήριο δεν έχει ένα σταθερό μήκος, όπως προηγούμενα το νήμα, οπότε τα δυο σώματα μπορούν να κινούνται με διαφορετικές ταχύτητες! Όσον αφορά την ισχύ της δύναμης θα έχουμε:

$$P_{F_1} = F \cdot v_1 \cdot \cos 0^\circ = F \cdot v_1 = 20 \cdot 4,8 \text{ J/s} = 96 \text{ J/s}$$

β) Για το μέτρο της δύναμης του ελατηρίου έχουμε:

$$|F_{ελ}| = F_{ελ} = k\Delta l = 20 \cdot (0,8 - 0,3)N = 10N \text{ ενώ}$$

$$P_{F_{ελ,1}} = F_{ελ,1} \cdot v_1 \cdot \cos 180^\circ = -F_{ελ,1} \cdot v_1 = -10 \cdot 4,8J/s = -48J/s \text{ και}$$

$$\frac{dK_1}{dt} = \frac{dW_{ελ,1}}{dt} = \frac{|\Sigma F| \cdot |dx| \cdot \cos 0^\circ}{dt} = (F - F_{ελ,1})v_1 = (20 - 10) \cdot 4,8J/s = 48J/s$$

γ) Αντίστοιχα για το σώμα B:

$$P_{F_{ελ,2}} = |F_{ελ}| \cdot v_2 \cdot \cos 0^\circ = |F_{ελ}| \cdot v_2 = 10 \cdot 1,1J/s = 11J/s \text{ ενώ}$$

$$\frac{dK_2}{dt} = \frac{dW_{ελ,2}}{dt} = \frac{|\Sigma F| \cdot |dx| \cdot \cos 0^\circ}{dt} = |F_{ελ}| \cdot v_2 = 10 \cdot 1,1J/s = 11J/s$$

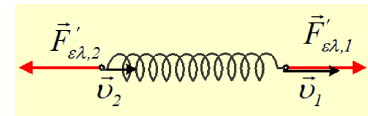
Τι γίνεται στην περίπτωση αυτή με τις ενέργειες;

Η δύναμη F, προσφέρει στο A σώμα ενέργεια με ρυθμό 96J/s, από αυτά τα 48J/s τα αφαιρεί η δύναμη του ελατηρίου και τα υπόλοιπα 48J/s αυξάνουν την κινητική ενέργεια το σώματος.

Όμως το ελατήριο, ενώ πήρε στο ένα του άκρο ενέργεια 48J/s, έδωσε στο σώμα B ενέργεια 11J/s (αυξάνοντας την κινητική το ενέργεια). Τα υπόλοιπα; Τα υπόλοιπα προφανώς αυξάνουν την δυναμική ενέργεια του ελατηρίου! Πρέπει δηλαδή να έχουμε αύξηση της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου κατά:

$$\frac{dU}{dt} = (48 - 11)J/s = 37J/s$$

Είναι πράγματι έτσι; Ας εστιάσουμε στο ελατήριο στο σχήμα, στις δυνάμεις που δέχεται και στις ταχύτητες των σημείων εφαρμογής των δυνάμεων.



$$P_{F'_{ελ,1}} = F'_{ελ,1} \cdot v_1 \cdot \cos 0^\circ = F'_{ελ,1} \cdot v_1 = 10 \cdot 4,8J/s = 48J/s \text{ και}$$

$$P_{F'_{ελ,2}} = F'_{ελ,2} \cdot v_2 \cdot \cos 180^\circ = -F'_{ελ,2} \cdot v_2 = -10 \cdot 1,1J/s = -11J/s$$

Βλέπουμε η συνολική ισχύς των δυνάμεων που παράγουν έργο πάνω στο ελατήριο να είναι 37J/s και αν το ελατήριο δεν έχει κινητική ενέργεια, αυτήν την ενέργεια δεν μπορεί παρά να την αποθηκεύει με τη μορφή της δυναμικής ενέργειας ελαστικότητας.

Αξίζει να δούμε τις διαφορές με το νήμα. Εδώ το ελατήριο δεν είναι απλά ένα μέσον για την μεταφορά της ενέργειας από το σώμα A στο σώμα B. Το μήκος του, μπορεί να αυξομειώνεται και να κερδίζει ή να αποδίδει ενέργεια στα δυο σώματα.

[dmargaris@gmail.com](mailto:dmargaris@gmail.com)