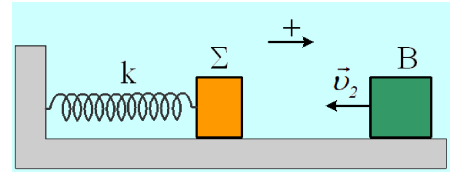


Μια πλαστική κρούση και δύο ταλαντώσεις

Ένα σώμα Σ εκτελεί αατ, δεμένο στο άκρο ενός ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k=100\text{N/m}$ σε λείο οριζόντιο επίπεδο, με εξίσωση απομάκρυνσης $x=0,5\cdot\eta\mu(10t)$ (μονάδες στο S.I.). Τη χρονική στιγμή $t_1=11\pi/50$ s το σώμα Σ συγκρούεται πλαστικά με ένα δεύτερο σώμα



B , το οποίο κινείται προς τα αριστερά με ταχύτητα μέτρου $v_2=4/3$ m/s (η προς τα δεξιά κατεύθυνση θεωρείται θετική), οπότε το συσσωμάτωμα ξεκινά μια νέα ταλάντωση με πλάτος $A_1=0,3\text{m}$.

- i) Να υπολογιστεί η μάζα του σώματος Σ , καθώς και η ταχύτητά του ελάχιστα πριν την κρούση.
- ii) Να βρεθεί η μάζα του σώματος του σώματος B .
- iii) Να γραφεί η εξίσωση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο $x=f(t)$, για την ταλάντωση του συσσωματώματος.
- iv) Να γίνει η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης τος σώματος Σ , από τη στιγμή $t_0=0$, μέχρι τη στιγμή t_2 όπου ολοκληρώνεται μια πλήρης ταλάντωση του συσσωματώματος.

Δίνεται $\eta\mu(\pi/5)=0,6$.

Απάντηση:

- i) Από την εξίσωση $x=0,5\cdot\eta\mu(10t)$ προκύπτει ότι το σώμα Σ για $t=0$ περνά από την θέση ισορροπίας του O , κινούμενο προς την θετική κατεύθυνση (προς τα δεξιά), ενώ έχει γωνιακή συχνότητα $\omega=10\text{rad/s}$. Αλλά:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow m = \frac{k}{\omega^2} = \frac{100}{10^2} \text{ kg} = 1 \text{ kg}$$

Ενώ για την ταχύτητα του Σ ελάχιστα πριν την κρούση, για $t=t_1$ έχουμε:

$$v = v_o \sigma\upsilon\nu\omega t = A\omega \cdot \sigma\upsilon\nu(10t) \xrightarrow{t=11\pi/50} \\ v_1 = 0,5 \cdot 10 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(10 \cdot \frac{11\pi}{50}\right) = 5 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{11\pi}{5}\right) = 5 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(2\pi + \frac{\pi}{5}\right) = 5 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

$$\text{Όμως } \eta\mu^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + \sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1 \rightarrow \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{1 - \eta\mu^2\left(\frac{\pi}{5}\right)} = 0,8$$

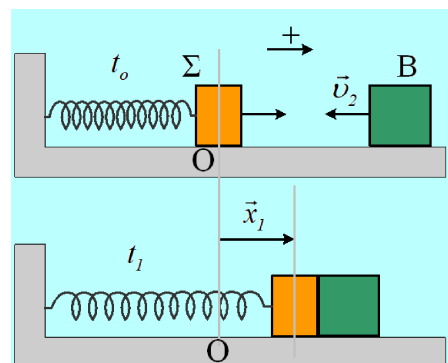
αφού η γωνία $\pi/5$ ανήκει στο 1ο τεταρτημόριο, όπου το $\sigma\upsilon\nu\theta > 0$. Έτσι με αντικατάσταση παίρνουμε:

$$v_1 = 5 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{5}\right) = 5 \cdot 0,8 \text{ m/s} = 4 \text{ m/s}$$

- ii) Σε ποια θέση έγινε η κρούση; Δεν έχουμε παρά να αντικαταστήσουμε στην εξίσωση της απομάκρυνσης:

$$x_1 = 0,5 \cdot \eta\mu\left(10 \cdot \frac{11\pi}{50}\right) = 0,5 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{5}\right) = 0,5 \cdot 0,6 \text{ m} = 0,3 \text{ m}$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι η κρούση έγινε σε απόσταση 0,3m από την θέση ισορροπίας O , όσο είναι και το πλάτος της ταλάντωσης που



θα εκτελέσει το συσσωμάτωμα. Αλλά αυτό σημαίνει ότι αμέσως μετά την κρούση η κοινή ταχύτητα των δύο σωμάτων είναι μηδενική. Έτσι εφαρμόζοντας την ΑΔΟ για την κρούση θα έχουμε:

$$\vec{p}_{\pi\rho} = \vec{p}_{\mu\epsilon\tau} \xrightarrow{\text{αλγεβρικά}} m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0 \rightarrow$$

$$m_2 = -\frac{m_1 v_1}{v_2} = -\frac{1 \cdot 4}{-4/3} \text{ kg} = 3 \text{ kg}$$

iii) Με βάση τα παραπάνω ευρήματα, το συσσωμάτωμα ξεκινά την ταλάντωσή του από θέση πλάτους, άρα η απομάκρυνσή του θα έχει αρχική φάση $\phi_0 = \pi/2$, ενώ το χρονικό διάστημα της ταλάντωσης θα είναι ίσο με $\Delta t = t' = t - t_1$. Με βάση αυτά η απομάκρυνσή του θα ικανοποιεί την εξίσωση:

$$x' = A' \cdot \eta\mu\left(\omega' t' + \frac{\pi}{2}\right) = 0,3 \cdot \eta\mu\left(\sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}(t - t_1) + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow$$

$$x' = 0,3 \cdot \eta\mu\left(\sqrt{\frac{100}{1+3}}(t - t_1) + \frac{\pi}{2}\right) = 0,3 \cdot \eta\mu\left\{5\left(t - \frac{11\pi}{50}\right) + \frac{\pi}{2}\right\} \rightarrow$$

$$x' = 0,3 \cdot \eta\mu\left(5t - \frac{3\pi}{5}\right) \text{ με } t > \frac{11\pi}{50} \text{ (S.I.)}$$

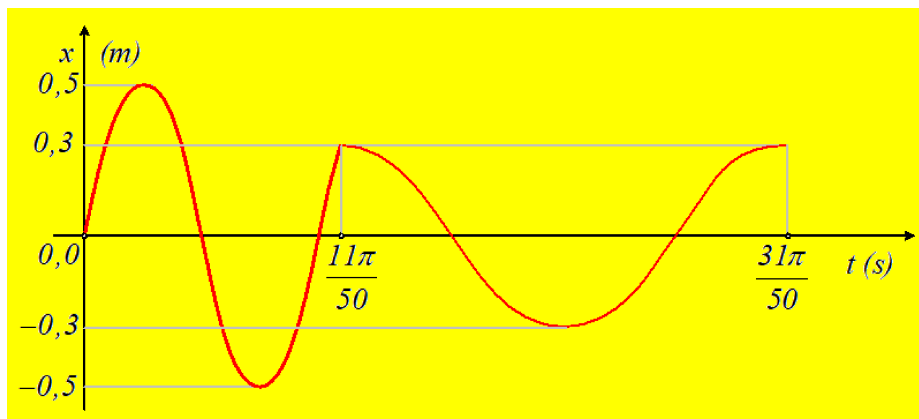
iv) Παραπάνω βρήκαμε ότι $\omega' = 5 \text{ rad/s}$, οπότε η περίοδος της νέας ταλάντωσης θα είναι:

$$\omega' = \frac{2\pi}{T'} \rightarrow T' = \frac{2\pi}{\omega'} = \frac{2\pi}{5} \text{ s}$$

Δηλαδή η γραφική παράσταση που ζητείται, είναι μέχρι τη στιγμή $t_2 = t_1 + T' = 31\pi/50 \text{ s}$, ενώ για την συνάρτηση της απομάκρυνσης του σώματος Σ θα έχουμε:

$$x = \begin{cases} 0,5 \cdot \eta\mu(10t) \text{ (S.I.) για } 0 \leq t \leq \frac{11\pi}{50} \\ 0,3 \cdot \eta\mu\left(5t - \frac{3\pi}{5}\right) \text{ (S.I.) με } t > \frac{11\pi}{50} \end{cases}$$

Με βάση τα παραπάνω η ζητούμενη γραφική παράσταση έχει την μορφή:



dmargaris@gmail.com