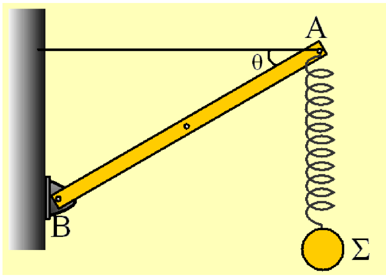
Μια ισορροπία ράβδου και μια ταλάντωση σφαίρας.



Μια ομογενής ράβδος ΑΒ βάρους w_1=40Ν, ισορροπεί, όπως στο σχήμα, σχηματίζοντας με την οριζόντια διεύθυνση γωνία θ, όπου ημθ=0,6 και συνθ=0,8, αρθρωμένη στο άκρο της Β σε κατακόρυφο τοίχο, ενώ έχει προσδεθεί στο άκρο της Α, μέσω οριζόντιου νήματος, με τον τοίχο. Στο άκρο της Α, έχει δεθεί και το πάνω άκρο ενός κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου, σταθεράς k=100N/m, στο άλλο άκρο του οποίου ηρεμεί μια σφαίρα Σ μάζας m=4kg.

i) Να υπολογιστούν τα μέτρα της οριζόντιας και της κατακόρυφης συνιστώσας της δύναμης που δέχεται η ράβδος από την άρθρωση, στο άκρο της Β.

ii) Εκτρέπουμε τη σφαίρα κατακόρυφα προς τα κάτω κατά y_1=0,3m και τη στιγμή t_0=0, την αφήνουμε να κινηθεί, με αποτέλεσμα να εκτελέσει ααт.

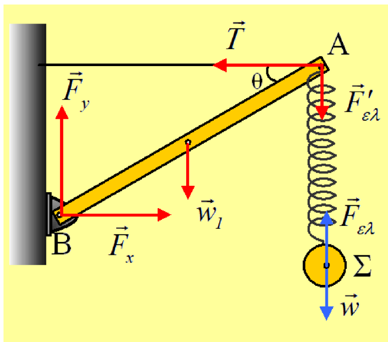
α) Να βρεθεί η εξίσωση της απομάκρυνσης της σφαίρας σε συνάρτηση με το χρόνο, θεωρώντας την προς τα κάτω κατεύθυνση ως θετική.

β) Να βρεθεί η εξίσωση της τάσης του νήματος σε συνάρτηση με το χρόνο *T=f(t)* και να παρασταθεί γραφικά.

iii) Σε μια στιγμή που η σφαίρα περνά από την θέση ισορροπίας της, συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με δεύτερη σφαίρα $Σ_1$, μάζας m_1=2kg, η οποία κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω. Να υπολογιστεί η ελάχιστη ταχύτητα της σφαίρας $Σ_1$, για την οποία μηδενίζεται η τάση του νήματος, που συγκρατεί τη ράβδο.

Δίνεται g=10m/s^2 .

Απάντηση:



i) Στο διπλανό σχήμα, έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις σε σφαίρα και ράβδο. Από την ισορροπία της σφαίρας παίρνουμε:

$$\Sigma\vec{F} = 0 \to |F_{ελ}| = k\Delta l = mg = 40N$$

Οπότε και στην ράβδο, στο άκρο της Α, ασκείται από το ελατήριο κατακόρυφη δύναμη, με φορά προς τα κάτω, του ίδιου μέτρου:

$$|F'_{ελ}| = 40N$$

Από την ισορροπία της ράβδου, παίρνουμε τις εξισώσεις:

$$\Sigma\vec{F} = 0 \to \begin{cases} \Sigma F_x = 0 \to F_x = T \ \ (1) \\ \Sigma F_y = 0 \to F_y - w_1 - F'_{ελ} = 0 \ \ (2) \end{cases}$$

$$\Sigma\tau = 0 \ \ (3)$$

Παίρνοντας τις ροπές ως προς το άκρο Β από την (3), με l το μήκος της ράβδου, έχουμε:

$$T\cdot l\eta\mu\theta - F'_{\varepsilon\lambda}\cdot l\sigma\upsilon\nu\theta - w_1\cdot {}^{l}\!/_{2}\,\sigma\upsilon\nu\theta = 0 \quad (3\alpha)$$

$$T\cdot 0,6 - 40\cdot 0,8 - 40\cdot {}^{1}\!/_{2}\cdot 0,8 = 0 \rightarrow T = 80N \rightarrow$$

Από την (1) $F_x=80N$ και από την (2) $F_y - 40N - 40N = 0 \rightarrow F_y = 80N$

ii) Αφού το σώμα αφήνεται να κινηθεί (χωρίς αρχική ταχύτητα) από απόσταση y_1 από την θέση ισορροπίας του θα εκτελέσει αατ με πλάτος $A=y_1$ και αφού ξεκινά από την ακραία θετική απομάκρυνση, θα έχει αρχική φάση π/2. Εξάλλου για την γωνιακή συχνότητα θα έχουμε:

$$D = k = m\omega^2 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{100}{4}}rad/s = 5rad/s$$

α) Με βάση τα παραπάνω, η εξίσωση της απομάκρυνσης παίρνει την μορφή:

$$y = A\eta\mu(\omega t + \varphi_o) \rightarrow y = 0,3\cdot\eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (S.I.)$$

β) Για την δύναμη επαναφοράς της ταλάντωσης της σφαίρας ισχύει:

$$\Sigma F = -Dy \rightarrow w + F_{\varepsilon\lambda} = -ky \rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = -mg - ky$$

$$F_{\varepsilon\lambda} = -40 - 100\cdot 0,3\cdot\eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) = -40 - 30\cdot\eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (S.I)$$

Αλλά τότε η δύναμη που το ελατήριο ασκεί στη ράβδο, είναι αντίθετη της παραπάνω δύναμης που ασκείται στη σφαίρα, η αλγεβρική της τιμή δηλαδή, ικανοποιεί την εξίσωση:

$$F'_{\varepsilon\lambda} = 40 + 30\cdot\eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (S.I)$$

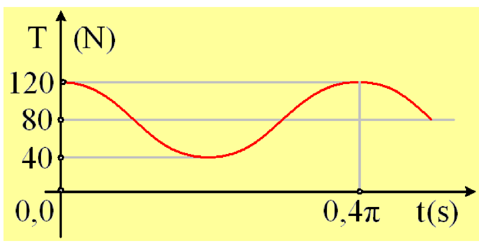
Αξίζει να προσέξουμε ότι η παραπάνω αλγεβρική τιμή είναι πάντα θετική, πράγμα που σημαίνει ότι η δύναμη αυτή έχει κατεύθυνση πάντα προς τα κάτω, όπως έχει σημειωθεί και στο παραπάνω σχήμα. Εφαρμόζοντας τώρα την εξίσωση (3) ως προς το άκρο Α της ράβδου, θα πάρουμε ξανά την εξίσωση (3α) όπου με αντικατάσταση θα πάρουμε:

$$T\cdot l\eta\mu\theta - F'_{\varepsilon\lambda}\cdot l\sigma\upsilon\nu\theta - w_1\cdot {}^{l}\!/_{2}\,\sigma\upsilon\nu\theta = 0 \rightarrow$$

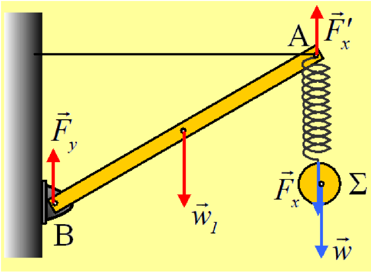
$$T\cdot 0,6 - \left(40 + 30\cdot\eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)\right)\cdot 0,8 - 40\cdot {}^{1}\!/_{2}\cdot 0,8 = 0 \rightarrow$$

$$T = 80 + 40\cdot\eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (S.I.)$$

Η αντίστοιχη γραφική παράσταση έχει τη μορφή του διπλανού σχήματος.



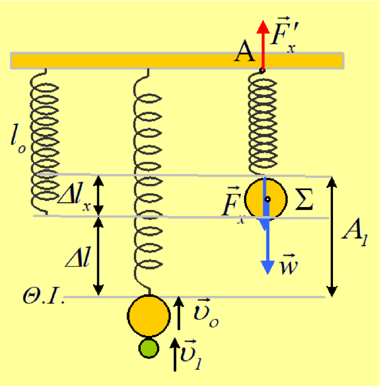
iii) Έστω ότι οριακά μηδενίζεται η τάση του νήματος, ενώ η ράβδος ισορροπεί, με την άσκηση μιας δύναμης από το ελατή-



ριο με μέτρο F_x. Αν πάρουμε τις ροπές ως προς το άκρο Β της ράβδου, έχουμε ροπές δύο δυνάμεων, του βάρους και της δύναμης του ελατηρίου. Αλλά τότε οι ροπές αυτές πρέπει να είναι αντίθετες, πράγμα που σημαίνει ότι η κατεύθυνση της F'_x είναι προς τα πάνω όπως στο σχήμα και το ελατήριο είναι συσπειρωμένο. Έτσι από την ισορροπία της ράβδου, παίρνουμε:

$$\Sigma\tau_B = 0 \rightarrow F'_x \cdot l\sigma\upsilon\nu\theta - w_1 \cdot {}^{l}\!/_{2}\,\sigma\upsilon\nu\theta = 0 \rightarrow F'_x = \frac{1}{2}w_1 = 20N$$

Αλλά τότε το ελατήριο έχει συσπειρωθεί κατά $F'_x = k\Delta l_x \rightarrow \Delta l_x = \dfrac{F'_x}{k} = \dfrac{20N}{100N/m} = 0,2m$



Αν τώρα θέλουμε την ελάχιστη ταχύτητα της σφαίρας Σ_1, αυτό σημαίνει δύο πράγματα. Πρώτον τη στιγμή της κρούσης η σφαίρα Σ να κινείται προς τα πάνω και δεύτερον τη στιγμή μηδενισμού της τάσης το σώμα να βρίσκεται στην πάνω ακραία θέση της ταλάντωσής του, σε θέση πλάτους.

Για την θέση ισορροπίας της σφαίρας:

$$k\Delta l = mg \rightarrow \Delta l = \frac{mg}{k} = \frac{4\cdot 10}{100}m = 0,4m$$

οπότε το πλάτος ταλάντωσης μετά την κρούση είναι ίσο (βλέπε σχήμα):

$$A_1 = \Delta l + \Delta l_x = 0,4m + 0,2m = 0,6m$$

Αλλά τότε ενώ η ταχύτητα υ_o της σφαίρας Σ πριν την κρούση είχε μέτρο $\upsilon_o = \omega A = 5\cdot 0,3m/s = 1,5m/s$, αμέσως μετά την κρούση, η ταχύτητα u στην θέση ισορροπίας της νέας ταλάντωσης, έχει μέτρο $u = \omega A_1 = 5\cdot 0,6m/s = 3m/s$. Έτσι παίρνοντας την σχέση για την ταχύτητα της σφαίρας Σ μετά την κεντρική και ελαστική κρούση θα έχουμε:

$$u = \frac{m-m_1}{m+m_1}\upsilon_o + \frac{2m_1}{m+m_1}\upsilon_{1,\varepsilon\lambda} \rightarrow$$

$$\upsilon_{1,\varepsilon\lambda} = \frac{m+m_1}{2m_1}u - \frac{m-m_1}{2m_1}\upsilon_o \rightarrow$$

$$\upsilon_{1,\varepsilon\lambda} = \frac{4+2}{2\cdot 2}3m/s - \frac{4-2}{2\cdot 2}1,5m/s = 3,75m/s$$

dmargaris@gmail.com