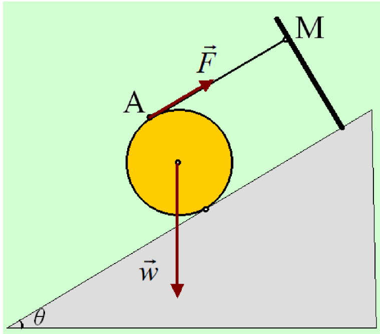
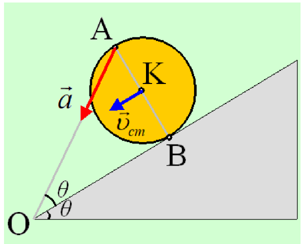
Μελετώντας μια κύλιση δίσκου.



Ένας ομογενής λεπτός δίσκος, κέντρου Κ, βάρους w=100Ν και ακτίνας R=3/8m, ισορροπεί σε κεκλιμένο επίπεδο, κλίσεως θ, όπου ημθ=0,6 και συνθ=0,8 με την βοήθεια νήματος που έχει τυλιχθεί γύρω του, το άκρο του οποίου έχει δεθεί σε σημείο Μ, έτσι ώστε το τμήμα του νήματος ΜΑ να είναι παράλληλο στο κεκλιμένο επίπεδο.

i) Αφού αποδείξετε ότι το κεκλιμένο επίπεδο δεν είναι λείο, να υπολογιστεί το μέτρο της δύναμης F που ασκεί στον δίσκο το νήμα (η τάση του νήματος).



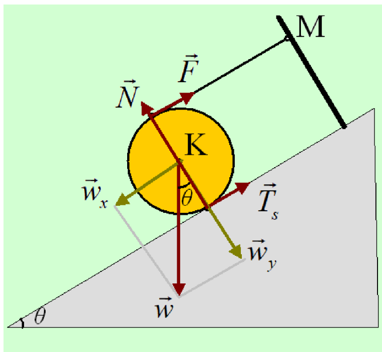
Σε μια στιγμή κόβουμε το νήμα και ο δίσκος αρχίζει να κυλίεται με σταθερή επιτάχυνση κέντρου μάζας, κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου. Μετά από λίγο, τη στιγμή t_1, βρίσκεται στη θέση που δείχνει το διπλανό σχήμα, όπου η επιτάχυνση του σημείου Α, έχει μέτρο α=10m/s^2 και κατευθύνεται προς την βάση Ο του επιπέδου, όπου το ευθύγραμμο τμήμα ΟΑ σχηματίζει γωνία θ με το κεκλιμένο επίπεδο. Να επισημανθεί ότι το σημείο Α, είναι αντιδιαμετρικό του σημείου επαφής Β, του δίσκου με το επίπεδο. Να υπολογιστούν τη στιγμή αυτή t_1:

ii) Η επιτάχυνση του σημείου Β.

iii) Η γωνιακή ταχύτητα και η ταχύτητα υ_{cm} του κέντρου μάζας Κ του στερεού.

iv) Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας καθώς και η γωνιακή επιτάχυνση του στερεού.

Απάντηση:



i) Έστω ότι το επίπεδο είναι λείο. Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις (ας μην βλέπουμε την τριβή!!!), όπου Ν η κάθετη αντίδραση του επιπέδου. Από την συνθήκη ισορροπίας του στερεού έχουμε τις εξισώσεις:

$$\Sigma\vec{F}=0 \ \ (1) \ \ \kappa\alpha\iota \ \ \Sigma\tau_K=0 \ \ (2)$$

όπου εδώ παίρνουμε τις ροπές ως προς το κέντρο Κ του δίσκου. Όμως το βάρος και η Ν διέρχονται από το Κ και δεν έχουν ροπή, ενώ αντίθετα η δύναμη F παρουσιάζει ροπή ως προς το Κ ίση με FR, οπότε δεν μπορεί να ικανοποιείται η εξίσωση (2) και η υπόθεσή μας καταλήγει σε άτοπο. Το επίπεδο δεν είναι λείο και στο δίσκο ασκείται στατική τριβή, όπως στο σχήμα, αφού η ροπή της πρέπει να εξουδετερώνει την ροπή της τάσης του νήματος. Με αντικατάσταση τώρα στην (2) παίρνουμε:

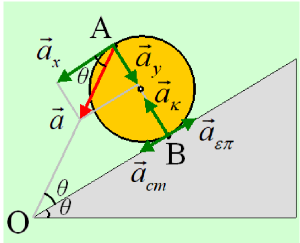
$$\Sigma\tau_K=0 \ \rightarrow w\cdot 0+N\cdot 0+T_sR-FR=0\rightarrow T_s=F \ \ (2a)$$

οπότε επιστρέφοντας στην εξίσωση (1), δουλεύοντας σε άξονες, παίρνουμε:

$$\Sigma\vec{F}=0 \ \ \rightarrow \ \Sigma F_x=0 \ \ (1a) \ \ \kappa\alpha\iota \ \ \Sigma F_y=0 \ \ (1\beta)$$

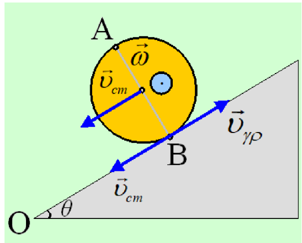
$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F + T_s - w_x = 0 \xrightarrow{(2a)} 2F = w \cdot \eta\mu\theta \rightarrow F = \frac{1}{2} 100 \cdot 0{,}6N = 30N$$

ii) Αναλύουμε την επιτάχυνση του σημείου Α, σε μια συνιστώσα στην διεύθυνση της ακτίνας, την α_y και μια κάθετη σε αυτήν, άρα εφαπτόμενη του δίσκου α_x, όπως στο σχήμα. Προφανώς η α_x είναι παράλληλη στο κεκλιμένο επίπεδο, οπότε σχηματίζει με την επιτάχυνση γωνία θ (εντός εναλλάξ) με την γωνία της ΟΑ με το κεκλιμένο. Θεωρώντας την κύλιση ως μια σύνθετη κίνηση, η επιτάχυνση α_y αντιστοιχεί στην κεντρομόλο επιτάχυνση του σημείου Α, για την κυκλική κίνησή του γύρω από το Κ. Για το μέτρο της έχουμε:



$$\alpha_y = \alpha_\kappa = \alpha \cdot \eta\mu\theta = 10 \cdot 0{,}6 m/s^2 = 6m/s^2.$$

Ερχόμενοι τώρα στο σημείο επαφής του δίσκου με το επίπεδο, το σημείο Β, αυτό έχει λόγω μεταφορικής κίνησης την επιτάχυνση α_{cm} και λόγω της επιταχυνόμενης κυκλικής του κίνησης την επιτάχυνση $\alpha_{\varepsilon\pi}$ αντίθετης φοράς με μέτρο $\alpha_{\varepsilon\pi} = \alpha_\gamma R$. Όμως από την συνθήκη κύλισης $\upsilon_{cm}=\omega R$, οπότε:



$$\frac{d\upsilon_{cm}}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R \rightarrow \alpha_{cm} = \alpha_\gamma R = a_{\varepsilon\pi} \quad (1)$$

Άρα η συνολική εφαπτομενική επιτάχυνση είναι μηδενική και η μόνη επιτάχυνση που έχει το σημείο Β είναι η κεντρομόλος επιτάχυνση, ίση με την κεντρομόλο επιτάχυνση του σημείου α, δηλαδή:

$$\alpha_B = \alpha_\kappa = 6m/s^2.$$

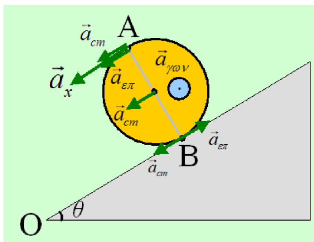
iii) Επανερχόμενοι στην κεντρομόλο επιτάχυνση του σημείου Α (ή του σημείου Β…) έχουμε:

$$\alpha_\kappa = \omega^2 R \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\alpha_\kappa}{R}} = \sqrt{\frac{6}{3/8}} rad/s = \sqrt{16} rad/s = 4 rad/s$$

Ενώ για την ταχύτητα του κέντρου Κ του δίσκου, έχουμε:

$$\upsilon_{cm} = \omega R = 4 \cdot 3/8 \, m/s = 1{,}5 m/s$$

iv) Επιστρέφουμε στο σημείο Α. Αυτό εκτός της κεντρομόλου επιτάχυνσης, έχει επιτάχυνση ίση με α_{cm} λόγω της μεταφορικής κίνησης του δίσκου και επιτρόχια επιτάχυνση, λόγω της επιταχυνόμενης στροφικής κίνησης, με κατευθύνσεις όπως στο σχήμα. Αλλά τότε με τη βοήθεια της σχέσης (1):



$$\alpha_x = \alpha_{cm} + a_{\varepsilon\pi} = 2a_{cm} \rightarrow a_{cm} = \frac{1}{2}\alpha_x = \frac{1}{2} a \cdot \sigma\upsilon\nu\theta \rightarrow$$

$$a_{cm} = \frac{1}{2} 10 \cdot 0{,}8 m/s^2 = 4m/s^2.$$

Ενώ για την γωνιακή επιτάχυνση έχουμε:

$$\alpha_{cm} = \alpha_\gamma R \rightarrow$$

$$\alpha_{\gamma} = \frac{\alpha_{cm}}{R} = \frac{4}{3/8} rad/s^2 = \frac{32}{3} rad/s^2 .$$

κάθετη στο επίπεδο της σελίδας, στο κέντρο Κ, με φορά προς τον αναγνώστη, όπως στο σχήμα.

dmargaris@gmail.com