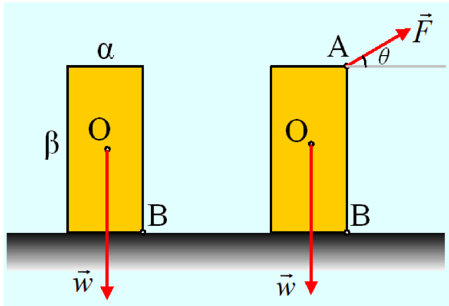
Ισορροπία μιας ορθογώνιας πλάκας



Μια λεπτή ομογενής ορθογώνια πλάκα, βάρους w=200N, ισορροπεί σε οριζόντιο επίπεδο, όπως στο πρώτο σχήμα. Οι πλάκα έχει πλευρές α=0,4m και β=1m.

i) Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο και αφού υπολογίσετε τα μέτρα τους, να υπολογίστε τη ροπή καθεμιάς, ως προς το κέντρο Ο της πλάκας και ως προς την κορυφή της Β.

ii) Ασκούμε στην κορυφή Α της πλάκας μια δύναμη μέτρου F=50N, η οποία σχηματίζει γωνία θ με την οριζόντια διεύθυνση, όπου ημθ=0,6 και συνθ=0,8, όπως στο δεύτερο σχήμα, με αποτέλεσμα η πλάκα να συνεχίσει να ισορροπεί.

α) Να σχεδιάστε ξανά τις ασκούμενες δυνάμεις στην πλάκα και να υπολογίστε τα μέτρα τους.

β) Να υπολογίσετε ξανά τις ροπές όλως των δυνάμεων ως προς το κέντρο Ο και ως προς την κορυφή Β.

γ) Ποιος ο ελάχιστος συντελεστής οριακής στατικής τριβής μεταξύ πλάκας και επιπέδου, για να εξασφαλίζεται η παραπάνω ισορροπία;

iii) Αν ο συντελεστής οριακής στατικής τριβής μεταξύ πλάκας και επιπέδου είναι διπλάσιος από αυτόν που υπολογίσατε παραπάνω και αυξήσουμε το μέτρο της ασκούμενης δύναμης, ώστε $F=F_1=60N$, τότε τι πρόκειται να συμβεί:

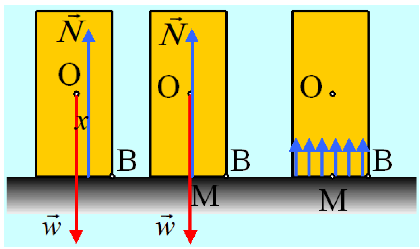
α) Η πλάκα θα συνεχίσει να ισορροπεί.

β) Η πλάκα θα επιταχυνθεί μεταφορικά προς τα δεξιά, ολισθαίνοντας πάνω στο οριζόντιο επίπεδο.

γ) Η πλάκα θα περιστραφεί γύρω από την κορυφή της Β.

δ) Η πλάκα θα εκτελέσει σύνθετη κίνηση.

Απάντηση:



i) Στην πλάκα ασκείται το βάρος και η κάθετη αντίδραση από το επίπεδου Ν, ο φορέας της οποίας απέχει κατά x από το κέντρο Ο της πλάκας. Από την ισορροπία της πλάκας, θα έχουμε ΣF=0 (1) και Στ=0 (2) , ως προς οποιοδήποτε σημείο. Από την (1) παίρνουμε (δουλεύουμε με μέτρα των δυνάμεων):

$$N-w=0 \rightarrow N=w=200N$$

Ενώ από την (2), ως προς το Ο, παίρνουμε:

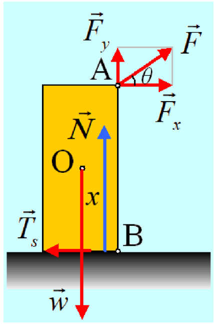
$$w\cdot 0+N\cdot x=0 \rightarrow x=0$$

Πράγμα που σημαίνει ότι ο φορέας της Ν, ταυτίζεται με τον φορέα του βάρους, όπως στο μεσαίο σχήμα. Στην πραγματικότητα, δυνάμεις από το επίπεδο ασκούνται σε όλη την έκταση της βάσης, όπως στο δεξιό σχήμα και η παραπάνω δύναμη στήριξης Ν που υπολογίσαμε, είναι απλά η συνισταμένη όλων αυτών των κατακορύφων δυνάμεων. Λόγω συμμετρίας ο φορέας της συνισταμένης διέρχεται από το μέσον Μ της βάσης, οπότε και από το κέντρο Ο της πλάκας. Αλλά τότε για τις ζητούμενες ροπές, θα έχουμε (οι αριστερόστροφες ροπές θεωρούνται θετικές, για όλες τις περιπτώσεις παρακάτω):

Ως προς το Ο: $\tau_w = \tau_N = 0$

Ως προς το Β: $\tau_w = +w \cdot \frac{\alpha}{2} = 200 \cdot 0{,}2Nm = 40Nm$ και $\tau_N = -N \cdot \frac{\alpha}{2} = -40Nm$

ii) Μόλις ασκηθεί η δύναμη F, η αναφερόμενη παραπάνω συμμετρία, δεν υπάρχει, οπότε η κάθετη αντίδραση του επιπέδου N, δεν περνά πια από το μέσον της βάσης.

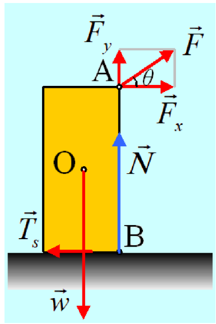


α) Έστω λοιπόν (ξανά…) x η απόσταση του φορέα της N από το κέντρο Ο, όπως στο σχήμα. Από την ισορροπία της πλάκας παίρνουμε:

$$\Sigma F_x = 0 \to F_x - T_s = 0 \to T_s = F \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = 50 \cdot 0{,}8N = 40N$$

$$\Sigma F_y = 0 \to F_y + N - w = 0 \to$$
$$N = w - F \cdot \eta\mu\theta = 200N - 50 \cdot 0{,}6N = 170N$$

$$E\nu\acute{\omega}\ \ \Sigma\tau_O = 0 \to w \cdot 0 + N \cdot x + F_y \cdot \frac{a}{2} - F_x \cdot \frac{\beta}{2} - T_s \cdot \frac{\beta}{2} = 0 \to$$
$$170x + 30 \cdot 0{,}2 - 40 \cdot 0{,}5 - 40 \cdot 0{,}5 = 0 \to$$
$$x = 0{,}2m$$



Δηλαδή η κάθετη αντίδραση του επιπέδου, ασκείται στην κορυφή Β, όπως στο σχήμα, πράγμα που σημαίνει ότι στην πραγματικότητα η πλάκα έρχεται σε επαφή με το οριζόντιο επίπεδο μόνο στο άκρο της βάσης Β. Με άλλα λόγια η πλάκα είναι «έτοιμη να ανατραπεί» γύρω από την κορυφή της Β!

β) Αλλά τότε για τις ροπές των δυνάμεων θα έχουμε:

Ως προς το κέντρο Ο:

$$\tau_w = 0, \qquad \tau_N = +N \cdot \frac{\alpha}{2} = 170 \cdot 0{,}2NM = 34Nm.$$
$$\tau_{T_s} = -T_s \cdot \frac{\beta}{2} = -40 \cdot 0{,}5Nm = -20Nm$$
$$\tau_F = \tau_{F_x} + \tau_{F_y} = -40 \cdot 0{,}5Nm + 30 \cdot 0{,}2Nm = -14Nm$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών είναι μηδενικό.

Ως προς την κορυφή Β:

$$\tau_w = +w \cdot \frac{\alpha}{2} = 200 \cdot 0{,}2NM = 40Nm, \qquad \tau_N = 0$$
$$\tau_{T_s} = \tau_{F_y} = 0 \ \ \kappa\alpha\iota\ \tau_{F_x} = -F_x \cdot \beta = -40 \cdot 1Nm = -40Nm$$

Και εδώ το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών, είναι ξανά μηδενικό.

γ) Για να εξασφαλίζεται η παραπάνω ισορροπία, πρέπει η παραπάνω τριβή να είναι στατική, δηλαδή να έχει μέτρο μικρότερο ή ίσο με την οριακή τριβή:

$$T_s \le T_{o\rho} \to T_s \le \mu_s N \to \mu_s \ge \frac{T_s}{N} \to \mu_s \ge \frac{40}{170} \to \mu_s \ge \frac{4}{17}$$

Άρα ο ελάχιστος συντελεστής οριακής στατικής τριβής είναι ίσος με $\mu_{s,min} = \dfrac{4}{17}$.

iii) Με βάση όσα υπολογίσαμε στο ερώτημα ii) α), αν αυξήσουμε το μέτρο της ασκούμενης δύναμης, η πλάκα θα ανατραπεί! Αλλά ας το δούμε αναλυτικότερα:

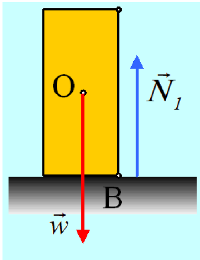
α) Έστω ότι η πλάκα ισορροπεί και d η απόσταση του φορέα της N από το κέντρο O.

Από την ισορροπία της πλάκας παίρνουμε:

$$\Sigma F_x = 0 \to F_{1x} - T_{s1} = 0 \to T_{s1} = F_1 \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = 60 \cdot 0,8N = 48N$$

$$\Sigma F_y = 0 \to F_{1y} + N_1 - w = 0 \to$$
$$N_1 = w - F_1 \cdot \eta\mu\theta = 200N - 60 \cdot 0,6N = 164N$$

$$E\nu\acute{\omega}\ \ \Sigma\tau_O = 0 \to w \cdot 0 + N_1 \cdot d + F_{1y} \cdot \frac{a}{2} - F_{1x} \cdot \frac{\beta}{2} - T_{s1} \cdot \frac{\beta}{2} = 0 \to$$
$$164d + 36 \cdot 0,2 - 48 \cdot 0,5 - 48 \cdot 0,5 = 0 \to$$
$$d \approx 0,25m$$



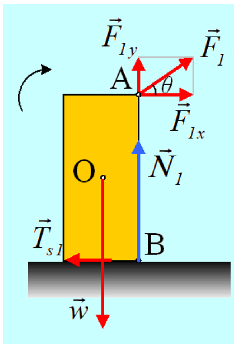
πράγμα άτοπο, αφού παραπέμπει στο διπλανό σχήμα, όπου το επίπεδο ασκεί κάθετη αντίδραση στην πλάκα, έξω από την βάση στήριξης!!!

β) Έστω ότι η πλάκα εκτελεί μεταφορική κίνηση ολισθαίνοντας προς τα δεξιά. Τότε η τριβή ολίσθησης θα είναι περίπου ίση με την οριακή, που στην περίπτωσή μας έχει μέτρο:

$$T_1 \approx T_{o\rho,1} = \mu_{s1} N_1 = 2 \cdot \frac{4}{17} \cdot 164N = 77N$$

Αλλά τότε η οριζόντια δύναμη που επιταχύνει την πλάκα θα έπρεπε να έχει μεγαλύτερο μέτρο και όχι μέτρο F_{1x}=48N. Η δύναμη αυτή δεν μπορεί να υπερνικήσει την τριβή που τείνει να αναπτυχθεί!

γ) Η πρόταση είναι σωστή. Αφού δεν μπορεί να υπάρξει μεταφορική κίνηση, η ταχύτητα της κορυφής B είναι μηδενική, οπότε παραμένει ακίνητη, ενώ στο σημείο B ασκείται και η κάθετη αντίδραση του επιπέδου N_1. Γύρω από νοητό σταθερό άξονα, κάθετο στο επίπεδο της σελίδας, ο οποίος περνά από το B, μπορεί να υπάρξει περιστροφή, αρκεί να ασκηθεί κατάλληλη ροπή, που να θέσει σε περιστροφή την πλάκα. Υπάρχει τέτοια ροπή; Λαμβάνοντας υπόψη το διπλανό σχήμα, έχουμε για τις ροπές ως προς το B:



$$\Sigma\tau_B = w \cdot \frac{a}{2} + N_1 \cdot 0 + F_{1y} \cdot 0 - F_{1x} \cdot \beta - T_{s1} \cdot 0 \to$$
$$\Sigma\tau_B = 200 \cdot 0,2Nm - 48 \cdot 1Nm = -8Nm$$

βλέπουμε δηλαδή να ασκείται δεξιόστροφη συνολική ροπή στην πλάκα, η οποία θα την περιστρέψει ως προς το σταθερό άξονα στην κορυφή B. Η πλάκα δηλαδή… ανατρέπεται!

δ) Με βάση τα παραπάνω και αυτή η εκδοχή απορρίπτεται.

dmargaris@gmail.com