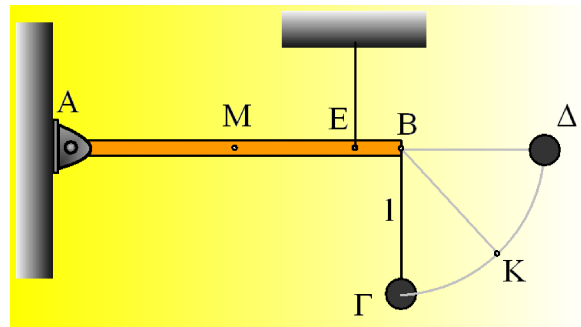


Η σφαίρα κινείται, ενώ η ράβδος ισορροπεί

Μια λεπτή ομογενής ράβδος AB, μήκους 2m και βάρους $w=24\text{N}$ ηρεμεί σε οριζόντια θέση, αρθρωμένη σε κατακόρυφο τοίχο στο άκρο της A, ενώ είναι δεμένη στο άκρο κατακόρυφου μη εκτατού νήματος, στο σημείο E, όπου $(EB)=0,2\text{m}$. Μια σφαίρα μάζας 5kg κρέμεται μέσω αβραρούς νήματος, μήκους $l=1\text{m}$, από το άκρο B της ράβδου.



- i) Να υπολογισθεί η δύναμη που ασκείται στη ράβδο από την άρθρωση, στο άκρο της A.
- ii) Εκτρέπουμε τη σφαίρα, φέρνοντάς την στη θέση Δ, όπου το νήμα είναι τεντωμένο (με μηδενική τάση) και οριζόντιο και την αφήνουμε να κινηθεί. Να υπολογισθεί η δύναμη που ασκείται στη ράβδο από την άρθρωση:
 - α) Αμέσως μόλις αφηθεί η σφαίρα να κινηθεί στην θέση Δ.
 - β) Τη στιγμή που η σφαίρα περνά από την θέση Γ.
- iii) Κατά την πτώση της σφαίρας, κάποια στιγμή πέρασε από μια θέση K, όπου ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της (θεωρούμε την σφαίρα ως υλικό σημείο), ως προς το κέντρο B της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει, έχει μέτρο $30\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2$. Για τη στιγμή αυτή ζητούνται:
 - α) Η στροφορμή της σφαίρας ως προς το σημείο B.
 - β) Η δύναμη που ασκεί η άρθρωση στην ράβδο.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

Απάντηση:

- i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται σε ράβδο και σφαίρα, όπου το νήμα ασκεί δυνάμεις ίσου μέτρου (η τάση του νήματος), στα δυο σώματα.

Από την ισορροπία της σφαίρας παίρνουμε:

$$\Sigma \vec{F}_\sigma = 0 \rightarrow T_l = w = mg = 5 \cdot 10\text{N} = 50\text{N}.$$

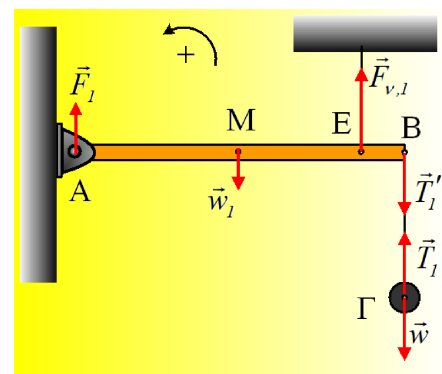
Ενώ για την ισορροπία της ράβδου, θα έχουμε:

$$\Sigma \vec{F}_\rho = 0 \quad (1) \quad \text{και} \quad \Sigma \tau = 0 \quad (2)$$

Από την εξίσωση (1), προκύπτει ότι αφού όλες οι άλλες δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο είναι κατακόρυφες, κατακόρυφη θα είναι και η δύναμη F_1 , από την άρθρωση. Ενώ εφαρμόζοντας την εξίσωση (2) ως προς το σημείο E με θετικές τις αριστερόστροφες ροπές, παίρνουμε:

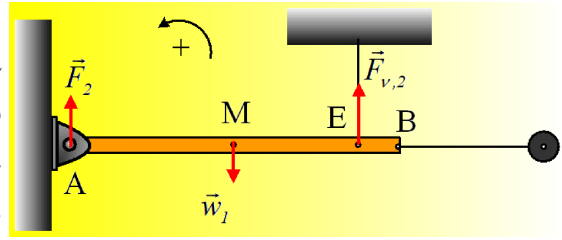
$$\begin{aligned} -F_1(AE) + w_l(ME) - T'_l(EB) &= 0 \xrightarrow{(S.I)} \\ -F_1 \cdot 1,8 + 24 \cdot 0,8 - 50 \cdot 0,2 &= 0 \rightarrow F_1 = 5,1\text{N} \end{aligned}$$

Το θετικό πρόσημο της δύναμης μας λέει, ότι η κατεύθυνσή, είναι αυτή που σχεδιάσαμε στο σχήμα (η F_1



από την άρθρωση είναι κατακόρυφη δύναμη με φορά προς τα πάνω).

- ii) α) Μόλις αφήσουμε την σφαίρα να πέσει στη θέση Δ, η τάση του νήματος είναι ... ακόμη μηδενική, οπότε οι δυνάμεις στη ράβδο είναι αυτές του σχήματος. Ενώ εφαρμόζοντας ξανά την εξίσωση (2) ως προς το σημείο E με θετικές τις αριστερόστροφες ροπές, παίρνουμε:



$$\begin{aligned} -F_2(AE) + w_1(ME) &= 0 \\ -F_2 \cdot 1,8 + 24 \cdot 0,8 &= 0 \rightarrow F_2 = 10,7 \text{ N} \end{aligned}$$

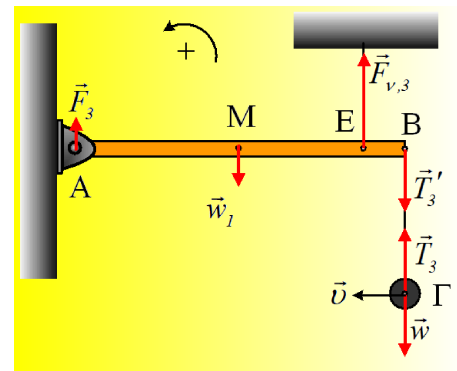
Με φορά προς τα πάνω όπως στο σχήμα.

- β) Εφαρμόζουμε για την κίνηση της σφαίρας από το Δ στο Γ, την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, παίρνοντας $U_{\Gamma}=0$.

$$\begin{aligned} K_{\Delta} + U_{\Delta} &= K_{\Gamma} + U_{\Gamma} \rightarrow \\ 0 + mgl &= \frac{1}{2}mv^2 + 0 \rightarrow v = \sqrt{2gl} \rightarrow \\ v &= \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 1} \text{ m/s} = \sqrt{20} \text{ m/s} \end{aligned}$$

Ενώ ο 2ος νόμος του Νεύτωνα δίνει:

$$\begin{aligned} \Sigma F_R &= m \frac{v^2}{R} \rightarrow T_3 - mg = m \frac{v^2}{R} \rightarrow \\ T_3 &= mg + m \frac{v^2}{l} = 5 \cdot 10 \text{ N} + 5 \frac{20}{1} \text{ N} = 150 \text{ N} \end{aligned}$$



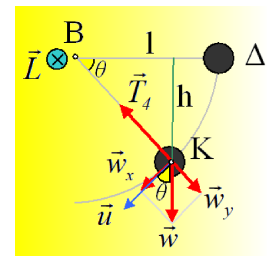
Και πάλι εφαρμόζοντας την εξίσωση (2) ως προς το σημείο E με θετικές τις αριστερόστροφες ροπές, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} -F_3(AE) + w_1(ME) - T_3'(EB) &= 0 \xrightarrow{(S.I)} \\ -F_3 \cdot 1,8 + 24 \cdot 0,8 - 150 \cdot 0,2 &= 0 \rightarrow F_3 = -6 \text{ N} \end{aligned}$$

Με φορά προς τα κάτω, αντίθετη από αυτή που έχει σημειωθεί στο σχήμα.

- iii) Έστω η σφαίρα στη θέση Κ, όπου δέχεται τις δυνάμεις που έχουν σημειωθεί στο διπλανό σχήμα. Για τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας, ως προς το κέντρο της τροχιάς Β, έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \Sigma \tau = \tau_w + \tau_T \xrightarrow{\tau_T = \tau_{wy} = 0} \frac{dL}{dt} = \tau_{wx} = mgs \nu \theta \cdot l \rightarrow \\ \sigma \nu \theta &= \frac{dL/dt}{mgl} = \frac{30}{5 \cdot 10 \cdot 1} = 0,6 \end{aligned}$$



Αλλά τότε η θέση Κ απέχει κατακόρυφη απόσταση h από το Δ, όπου:

$$h = l \cdot \eta \mu \theta = l \cdot \sqrt{1 - \sigma \nu^2 \theta} = l \sqrt{1 - 0,6^2} \text{ m} = 0,8 \text{ m}$$

- α) Εφαρμόζοντας τώρα την ΑΔΜΕ μεταξύ των θέσεων Δ και Κ, για την κίνηση της σφαίρας, με $U_{\text{K}}=0$,

παίρνουμε:

$$K_{\Delta} + U_{\Delta} = K_{\kappa} + U_{\kappa} \rightarrow$$

$$0 + mgh = \frac{1}{2} mu^2 + 0 \rightarrow u = \sqrt{2gh} \rightarrow$$

$$u = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0,8} \text{ m/s} = 4 \text{ m/s}$$

Συνεπώς η σφαίρα έχει στροφορμή κάθετη στο επίπεδο της τροχιάς, στο κέντρο B, με φορά προς τα μέσα και μέτρο:

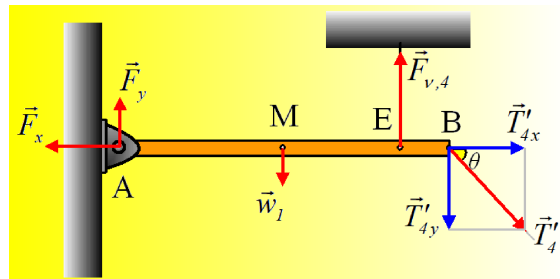
$$L_{\kappa} = mul = 5 \cdot 4 \cdot 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}} = 20 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}$$

β) Εξάλλου από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα στην ακτινική διεύθυνση, παίρνουμε για την τάση του νήματος:

$$\Sigma F_R = m \frac{u^2}{R} \rightarrow T_4 - w_y = m \frac{u^2}{l} \rightarrow$$

$$T_4 = mg \eta \mu \theta + m \frac{u^2}{l} = 5 \cdot 10 \cdot 0,8 \text{ N} + 5 \frac{16}{1} \text{ N} = 120 \text{ N}$$

Ερχόμενοι τώρα στις δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο, έχουμε την εικόνα του διπλανού σχήματος, όπου η τάση του νήματος T_4 αναλύεται σε δύο συνιστώσες, μια οριζόντια και μια κατακόρυφη, ενώ η δύναμη από την άρθρωση έχει αναλυθεί σε δύο επίσης συνιστώσες F_x και F_y .



Εφαρμόζοντας τώρα την εξίσωση (1) για την ισορροπία της ράβδου παίρνουμε:

$$\Sigma \vec{F}_p = 0 \rightarrow \Sigma F_x = 0 \rightarrow F_x = T'_{4x} = T_4 \cdot \sigma \nu \theta = 120 \cdot 0,6 \text{ N} = 72 \text{ N}$$

Ενώ την εξίσωση (2) για την παραπάνω ισορροπία, ως προς το σημείο E με θετικές τις αριστερόστροφες ροπές, έχουμε:

$$-F_y(AE) + w_l(ME) - T'_4 \cdot \eta \mu \theta(EB) = 0 \xrightarrow{(S.I)} \rightarrow$$

$$-F_y \cdot 1,8 + 24 \cdot 0,8 - 120 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 0 \rightarrow F_y = 0$$

Βλέπουμε δηλαδή τώρα η άρθρωση να ασκεί οριζόντια δύναμη στη ράβδο μέτρου $F_x = 72 \text{ N}$, με φορά προς τα αριστερά.

dmargaris@gmail.com