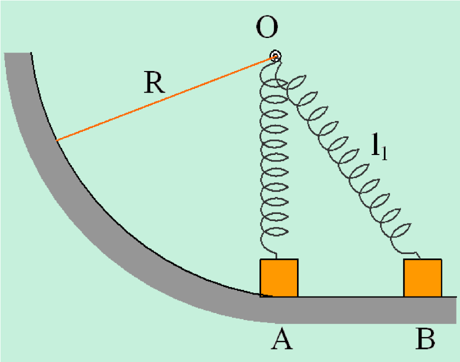
# *Η κίνηση σε κυκλικό οδηγό*




Ένα σώμα μάζας 3kg, θεωρείται υλικό σημείο, αμελητέων διαστάσεων και ισορροπεί στη θέση Α, όπως στο σχήμα, δεμένο στο κάτω άκρο ενός κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου, με φυσικό μήκος $l_o$=0,9m και σταθερά k=80N/m, το άλλο άκρο του οποίου έχει προσδεθεί στο κέντρο Ο, ενός λείου κατακορύφου κυκλικού οδηγού, ακτίνας R=1m.

i) Να υπολογιστούν τα μέτρα των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα στη θέση Α.

Εκτρέπουμε το σώμα πάνω στο λείο οριζόντιο επίπεδο, στην προέκταση του κυκλικού αγωγού, φέρνοντάς το στη θέση Β, όπου το ελατήριο αποκτά μήκος $l_1$=1,3m και το αφήνουμε να κινηθεί.

ii) Να αποδείξετε ότι το σώμα θα κινηθεί σε επαφή με το οριζόντιο επίπεδο, προς την θέση Α.

iii) Να βρεθεί η στροφορμή του σώματος, μόλις μπει στον κυκλικό αγωγό, ως προς το κέντρο Ο της κυκλικής τροχιάς Ο, καθώς και οι ρυθμοί μεταβολής:

α) Της στροφορμής, ως προς το Ο,

β) της ορμής του σώματος.

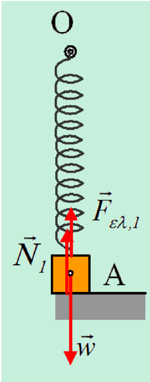
iv) Να βρεθεί η θέση πάνω στον κυκλικό αγωγό, στην οποία θα μηδενιστεί η ταχύτητα του σώματος. Για την θέση αυτή να υπολογιστούν:

α) Η δύναμη που ασκείται στο σώμα από τον κυκλικό οδηγό.

β) Η στροφορμή και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του σώματος ως προς το Ο.

Δίνεται g=10m/s².

### *Απάντηση:*

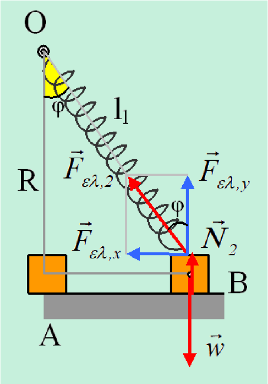



i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα, κατά την ισορροπία του στη θέση Α. Το ελατήριο έχει επιμήκυνση $\Delta l_1=R-l_o=0{,}1m$, γι΄αυτό η δύναμη σχεδιάστηκε με φορά προς τα πάνω. Για τα μέτρα των δυνάμεων έχουμε:

$$w = mg = 3\cdot 10N = 30N$$

$$F_{ελ,1} = k\Delta l_1 = 80\cdot 0{,}1N = 8N,\ \ ενώ:$$

$$\Sigma F = 0 \rightarrow N_1 + F_{ελ,1} - w = 0 \rightarrow N_1 = w - F_{ελ,1} = 30N - 8N = 22N$$




ii) Μόλις το σώμα αφεθεί να κινηθεί στη θέση Β, δέχεται τις δυνάμεις, όπως στο σχήμα. Με ανάλυση της δύναμης του ελατηρίου σε δυο συνιστώσες, θα έχουμε:

$$F_{ελ,y} = F_{ελ,2}\cdot συνφ = k\Delta l_2 \cdot \frac{R}{l_1} = 80\cdot(1{,}3-0{,}9)\cdot\frac{1}{1{,}3}N = 24{,}6N$$

παρατηρούμε ότι η κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης του ελατηρίου έχει μέτρο μικρότερο από το βάρος (30N), με αποτέλεσμα το σώμα να μην χάνει την επαφή με το οριζόντιο επίπεδο και να επιταχύνεται οριζόντια, εξαιτίας της οριζόντιας συνιστώσας της δύναμης του ελατηρίου. Αλλά αν η επαφή δεν χάνεται στη θέση αυτή, δεν θα χαθεί σε καμιά άλλη θέση στη συνέχεια, αφού μικραίνει η δύναμη του ελατηρίου, μιας και μειώνεται η επιμήκυνσή του.

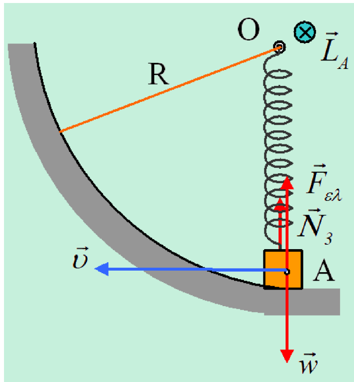
iii) Έστω υ η ταχύτητα του σώματος τη στιγμή που μπαίνει στον κυκλικό αγωγό. Εφαρμόζουμε για το σύστημα ελατήριο σώμα την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας (στη θέση Β το ελατήριο έχει επιμήκυνση $\Delta l_1=l_1-l_0=0{,}4m$, ενώ στη θέση Α $\Delta l_2=R-l_0=0{,}1m$):

$$K_B+U_B=K_A+U_A \xrightarrow{U_\beta=0}$$

$$0+\frac{1}{2}k\left(\Delta l_1\right)^2=\frac{1}{2}m\upsilon^2+\frac{1}{2}k\left(\Delta l_2\right)^2 \rightarrow$$

$$\upsilon=\sqrt{\frac{k}{m}\left(\left(\Delta l_1\right)^2-\left(\Delta l_2\right)^2\right)}=\sqrt{\frac{80}{3}\left(0{,}4^2-0{,}1^2\right)}m/s=\sqrt{\frac{80}{3}\left(0{,}16-0{,}01\right)}m/s=2m/s$$

Αλλά τότε το σώμα έχει στροφορμή, ως προς το κέντρο Ο της κυκλικής τροχιάς, με κατεύθυνση οριζόντια, κάθετη στο επίπεδο της σελίδας, όπως στο σχήμα και μέτρο:




$$L_A=m\upsilon R=3\cdot 2\cdot 1kg\frac{m^2}{s}=6kg\frac{m^2}{s}$$

α) Για το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του σώματος ως προς το Ο, θα έχουμε:

$$\frac{dL}{dt}=\Sigma\tau_O$$

Αλλά με βάση το σχήμα, οι φορείς όλων των ασκούμενων δυνάμεων περνάνε από το κέντρο Ο της κυκλικής τροχιάς, συνεπώς όλες οι ροπές είναι μηδενικές οπότε μηδενικός θα είναι και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής, $\frac{dL}{dt}=0$.

β) Αντίθετα για τον αντίστοιχο ρυθμό μεταβολής της ορμής του σώματος ισχύει:

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\Sigma\vec{F}$$

Η συνισταμένη δύναμη όμως, μόλις το σώμα περάσει στον κυκλικό αγωγό, είναι η κεντρομόλος δύναμη, με διεύθυνση την ακτίνα του κύκλου και φορά προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς, συνεπώς την ίδια κατεύθυνση θα έχει και ο ρυθμός μεταβολής της ορμής, ενώ για το μέτρο του έχουμε:

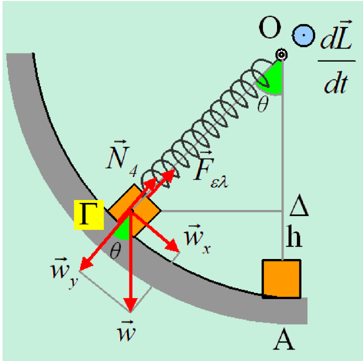
$$\frac{dp}{dt}=\Sigma F=m\frac{\upsilon^2}{R}=3\cdot\frac{2^2}{1}\frac{kgm}{s^2}=12\frac{kgm}{s^2}.$$

(Αξίζει να υπολογίσουμε την αντίδραση του επιπέδου $N_3$ στην θέση αυτή, όπου:

$$N_4+F_{\varepsilon\lambda}-w=12\rightarrow N_4=34N$$

κάνοντας σύγκριση με την τιμή $N_1=22N$, που βρήκαμε στο i) ερώτημα, για την ισορροπία).

iv) Κατά τη διάρκεια της κίνησης του σώματος στον κυκλικό οδηγό η δύναμη του ελατηρίου έχει σταθερό μέτρο και είναι συνεχώς κάθετη στην ταχύτητα, οπότε δεν παράγει έργο. Έργο παράγει μόνο το βάρος, με αποτέλεσμα το σώμα να εκτελεί επιβραδυνόμενη κίνηση και να μηδενίζεται (στιγμιαία) η ταχύτητά του σε μια θέση Γ, έχοντας ανέβει κατακόρυφα κατά h, όπως στο διπλανό σχήμα.




Εφαρμόζοντας για το σύστημα σώμα-ελατήριο, την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, μεταξύ των θέσεων Α και Γ, παίρνοντας $U_A=0$, παίρνουμε:

$$K_A + U_A = K_\Gamma + U_\Gamma \xrightarrow{U_A=0}$$

$$0 + \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}k\left(\Delta l_2\right)^2 = mgh + \frac{1}{2}k\left(\Delta l_2\right)^2 \rightarrow$$

$$h = \frac{\upsilon^2}{2g} = \frac{2^2}{2\cdot 10}m = 0,2$$

Αλλά τότε στη θέση Γ, ο άξονας του ελατηρίου σχηματίζει με την κατακόρυφη γωνία θ, όπου:

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{(O\Delta)}{(O\Gamma)} = \frac{l-h}{l} = \frac{1-0,2}{1} = 0,8$$

α) Αφού μηδενίζεται η ταχύτητα του σώματος στη θέση Γ, μηδενίζεται και η κεντρομόλος δύναμη, οπότε:

$$\Sigma F = F_\kappa = 0 \rightarrow F_{\varepsilon\lambda} + N_4 - w_y = 0 \rightarrow$$

$$N_4 = mg\sigma\upsilon\nu\theta - k\Delta l_2 = 3\cdot 10\cdot 0,8N - 80\cdot 0,1N = 24N - 8N = 16N$$

β) Αφού υ=0, προφανώς και η στροφορμή του σώματος είναι μηδενική, ενώ ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής είναι οριζόντιος, κάθετος στο επίπεδο της σελίδας με φορά προς τα έξω, στο κέντρο Ο, με μέτρο:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau_O = \tau_{N_4} + \tau_{F\varepsilon\lambda} + \tau_{w_y} + \tau_{w_x} \quad (1)$$

όπου $\tau_{N_4} = \tau_{F\varepsilon\lambda} = \tau_{w_y} = 0$ ενώ αφού $\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 \rightarrow ....\eta\mu\theta = 0,6$ και από την εξίσωση (1) παίρνουμε:

$$\frac{dL_\Gamma}{dt} = \tau_{w_x} = w_x R = mg\eta\mu\theta\cdot R = 3\cdot 10\cdot 0,6\cdot 1\frac{kgm^2}{s^2} = 18\frac{kgm^2}{s^2}.$$

**dmargaris@gmail.com**