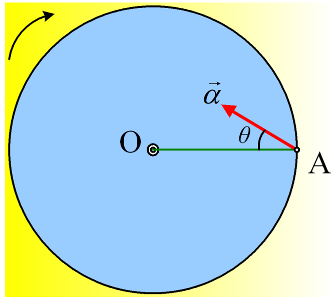
# Ο δίσκος στρέφεται και το σημείο επιταχύνεται




Ο δίσκος του σχήματος ακτίνας R=0,5m, περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα, κάθετο στο επίπεδό του, ο οποίος περνά από το κέντρο του Ο. Σε μια στιγμή t=0, μια ακτίνα ΟΑ είναι οριζόντια, ενώ το άκρο της Α έχει επιτάχυνση με κατεύθυνση όπως στο σχήμα, όπου συνθ=0,8 (ημθ=0,6), μέτρου α=2,5 m/s².

i) Να υπολογιστούν η κεντρομόλος και η επιτρόχιος επιτάχυνση του σημείου Α.

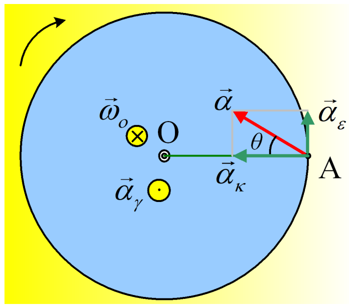
ii) Να βρεθούν η γωνιακή ταχύτητα και η γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου και να σημειωθούν τα αντίστοιχα διανύσματα πάνω στο σχήμα.

iii) Αν η παραπάνω γωνιακή επιτάχυνση παραμένει σταθερή:

α) να βρεθεί χρονική στιγμή $t_1$, όπου η επιτάχυνση του άκρου μιας οριζόντιας ακτίνας είναι κατακόρυφη, για πρώτη φορά. Ποιο το μέτρο της επιτάχυνσης αυτής;

β) Να βρεθεί η χρονική στιγμή $t_2$ που η ακτίνα ΟΑ θα βρεθεί για πρώτη φορά, στην αρχική της θέση όπως στο σχήμα. Να βρεθούν η οριζόντια και η κατακόρυφη συνιστώσα της επιτάχυνσης του σημείου Α την παραπάνω στιγμή.

## Απάντηση:




i) Αναλύουμε την επιτάχυνση του σημείου Α σε δύο κάθετες συνιστώσες, όπου η μία έχει την διεύθυνση της ακτίνας, η κεντρομόλος επιτάχυνση και η άλλη τη διεύθυνση της εφαπτόμενης του κύκλου, η επιτρόχια επιτάχυνση, υπεύθυνη για την μεταβολή του μέτρου της ταχύτητας του Α, όπως στο σχήμα. Για τα μέτρα τους έχουμε:

$$\alpha_\kappa = \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = 2,5 \cdot 0,8\, m/s^2 = 2\, m/s^2 \quad \text{και}$$

$$\alpha_\varepsilon = \alpha \cdot \eta\mu\theta = 2,5 \cdot 0,6\, m/s^2 = 1,5\, m/s^2$$

ii) Για τις παραπάνω επιταχύνσεις ισχύουν:

$$\alpha_\kappa = \omega^2 R \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\alpha_\kappa}{R}} = \sqrt{\frac{2}{0,5}}\, rad/s = 2\, rad/s$$

με διεύθυνση του άξονα, κάθετη στο επίπεδο της σελίδας και φορά προς τα μέσα.

$$\alpha_\varepsilon = \alpha_\gamma \cdot R \rightarrow \alpha_\gamma = \frac{\alpha_\varepsilon}{R} = \frac{1,5}{0,5}\, rad/s^2 = 3\, rad/s^2.$$

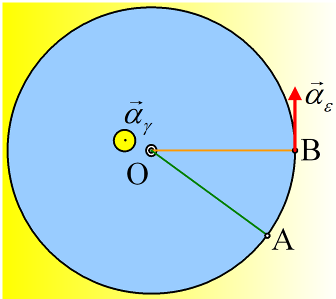
Χρησιμοποιώντας εξάλλου τον κανόνα του δεξιού χεριού, όπου τα ενωμένα δάκτυλα δείχνουν την κατεύθυνση της επιτρόχιας επιτάχυνσης, ο αντίχειρας μας δίνει την κατεύθυνση της γωνιακής επιτάχυνσης, επίσης πάνω στον άξονα περιστροφής και φορά προς τα έξω, όπως στο σχήμα.

iii) Από την στιγμή που η γωνιακή επιτάχυνση είναι σταθερή, η κίνηση του δίσκου είναι στροφική ομαλά μεταβαλλόμενη. Αν δε, θεωρήσουμε την αρχική γωνιακή ταχύτητα θετική με αλγεβρική τιμή $\omega_o$=2rad/s, τότε αντίστοιχα η γωνιακή επιτάχυνση έχει αλγεβρική τιμή $\alpha_\gamma$=-3rad/s$^2$. Αλλά τότε δουλεύοντας με αλγεβρικές τιμές, κατά αναλογία με την ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη (επιβραδυνόμενη) κίνηση, έχουμε τις εξισώσεις:

$$\omega = \omega_o + \alpha_\gamma t \quad (1) \quad \text{και} \quad \Delta\theta = \omega_o t + \frac{1}{2}\alpha_\gamma t^2 \quad (2)$$

όπου Δθ η γωνία που στρέφεται ο δίσκος (άρα και η ακτίνα ΟΑ).

α) Έστω τη στιγμή $t_1$ η οριζόντια ακτίνα είναι η ΟΒ (στη θέση της ακτίνας ΟΑ, που τώρα έχει βρεθεί σε άλλη θέση), οπότε το άκρο Β δεν έχει κεντρομόλο επιτάχυνση. Αυτό σημαίνει ότι τη στιγμή αυτή ο δίσκος έχει μηδενική γωνιακή ταχύτητα και η μόνη επιτάχυνση του Β, είναι η επιτρόχια επιτάχυνσή του, όπως στο διπλανό σχήμα. Αλλά αυτή η επιτάχυνση έχει σταθερό μέτρο, όσο ήταν και το μέτρο της αντίστοιχης επιτάχυνσης του σημείου Α, $\alpha_\varepsilon = 1,5\, m/s^2$.




Ενώ με αντικατάσταση στην (1) ω=0, παίρνουμε:

$$\omega = \omega_o + \alpha_\gamma t \xrightarrow{\omega=0} 0 = \omega_o + \alpha_\gamma t_1 \rightarrow$$

$$t_1 = -\frac{\omega_o}{\alpha_\gamma} = -\frac{2}{-3}s = \frac{2}{3}s$$

β) Την παραπάνω στιγμή $t_1$ έχει μηδενιστεί η γωνιακή ταχύτητα. Και μετά τι; Μετά ο δίσκος θα αρχίσει να στρέφεται με αντίθετη φορά (αριστερόστροφα). Αλλά τότε πότε θα φτάσει η ακτίνα ΟΑ για πρώτη φορά ξανά στην αρχική της (οριζόντια) θέση; Μήπως όταν ο δίσκος έχει ολοκληρώσει μια περιστροφή ή όταν η επιστρέψει στην αρχική θέση έχοντας διαγράψει γωνία Δθ= 0°;

Ας υπολογίσουμε τη γωνία που έχει διαγράψει η ακτίνα τη στιγμή $t_1$ που μηδενίζεται η γωνιακή ταχύτητα:

$$\Delta\theta = \omega_o t + \frac{1}{2}\alpha_\gamma t^2 \xrightarrow{t=t_1} \Delta\theta = 2\cdot\frac{2}{3}rad + \frac{1}{2}(-3)\left(\frac{2}{3}\right)^2 rad \rightarrow$$

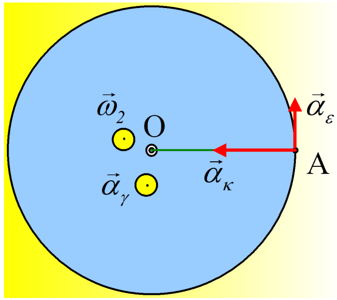
$$\Delta\theta = \frac{2}{3}rad$$

Προφανώς αυτή η γωνία είναι πολύ μικρότερη του π/2 και η ακτίνα έχει φτάσει στην θέση που έχει σημειωθεί στο παραπάνω σχήμα, οπότε θα επιστρέψει στη οριζόντια θέση όταν Δθ=0. Τότε:

$$\Delta\theta = \omega_o t + \frac{1}{2}\alpha_\gamma t^2 \xrightarrow{\Delta\theta=0} 0 = \omega_o t_2 + \frac{1}{2}\alpha_\gamma t_2^2 \rightarrow$$

$$0 = 2t_2 + \frac{1}{2}(-3)t_2^2 \rightarrow t_2 = 0 \;\; ή \;\; t_2 \frac{4}{3}s$$

Η πρώτη λύση $t_2$=0 μας δίνει την αρχική χρονική στιγμή, οπότε η ακτίνα ΟΑ γίνεται για 2η φορά οριζόντια τη χρονική στιγμή $t_2 \frac{4}{3}s$.



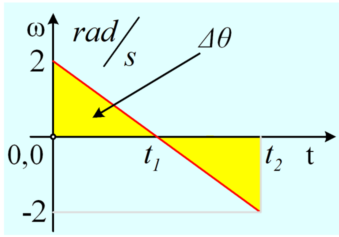

Εξάλλου με αντικατάσταση της παραπάνω χρονικής στιγμής στην εξίσωση (1) παίρνουμε:

$$\omega_2 = \omega_o + \alpha_\gamma t_2 = 2\,{rad}/{s} + (-3)\cdot\frac{4}{3}\,{rad}/{s} = -2\,{rad}/{s}$$

ίδιου μέτρου με την αρχική γωνιακή ταχύτητα.

Αυτό όμως σημαίνει ότι και η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι ίδια με την αρχική κεντρομόλο, όπως επίσης και η επιτρόχια επιτάχυνση είναι η ίδια με την την αντίστοιχη επιτρόχια τη στιγμή t=0.

**Σχόλιο:**




Εναλλακτικά θα μπορούσε να δουλέψει κάποιος χρησιμοποιώντας το διάγραμμα *ω=f(t)*, όπως στο σχήμα, λαμβάνοντας υπόψη ότι εμβαδόν του χωρίου, με κίτρινο χρώμα, είναι αριθμητικά ίσο με την γωνία περιστροφής του δίσκου.

**dmargaris@gmail.com**