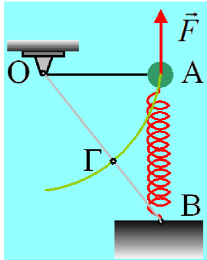
Η ισχύς και η στροφορμή σε μια κυκλική κίνηση



Μια σφαίρα μάζας 3kg ηρεμεί στην θέση Α, δεμένη στο άκρο αβαρούς και μη εκτατού οριζόντιου νήματος, μήκους d=0,6m και στο πάνω άκρο ενός ιδανικού κατακόρυφου ελατηρίου μήκους l=0,8m, το άλλο άκρο του οποίου έχει δεθεί στο έδαφος, σε σημείο Β. Η ισορροπία της σφαίρας εξασφαλίζεται με την επίδραση μιας κατακόρυφης δύναμης μέτρου F=70N, όπως φαίνεται στο σχήμα. Σε μια στιγμή παύουμε να ασκούμε την δύναμη F και η σφαίρα διαγράφει κατακόρυφη κυκλική τροχιά, οπότε μετά από λίγο περνά από την θέση Γ, όπου το νήμα έχει την διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου.

Αν το ελατήριο έχει φυσικό μήκος l_o=0,3m, ενώ g=10m/s^2, ζητούνται:

i) Η σταθερά k το ελατηρίου.

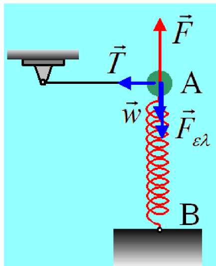
ii) Το μήκος του ελατηρίου όταν η σφαίρα περνά από τη θέση Γ.

iii) Η ταχύτητα της σφαίρας στη θέση Γ.

iv) Τα μέτρα των δυνάμεων που ασκούνται στη σφαίρα, στη θέση Γ, καθώς και η ισχύς κάθε δύναμης.

v) Η στροφορμή της σφαίρας ως προς οριζόντιο άξονα, κάθετο στο επίπεδο της κυκλικής τροχιάς, ο οποίος περνά από το κέντρο της Ο, καθώς και ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της στροφορμής.

Απάντηση:

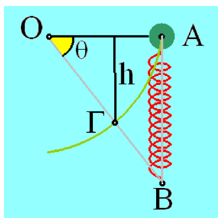


i) Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα, στη θέση Α. Από την συνθήκη ισορροπίας παίρνουμε:

$$\Sigma \vec{F}_x = 0 \rightarrow T = 0 \quad και$$

$$\Sigma \vec{F}_y = 0 \rightarrow F - w - F_{ελ} = 0 \rightarrow k\Delta l = F - mg \rightarrow$$

$$k = \frac{F - mg}{l - l_o} = \frac{70 - 3 \cdot 10}{0,8 - 0,3} N/m = 80\, N/m$$



ii) Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ παίρνουμε:

$$(OB) = \sqrt{(OA)^2 + (AB)^2} = \sqrt{d^2 + l^2} = \sqrt{0,6^2 + 0,8^2}\, m = 1m \rightarrow$$

$$(B\Gamma) = l_1 = (OB) - d = 1m - 0,6m = 0,4m$$

αφού το ελατήριο έχει μήκος ίσο με το τμήμα ΒΓ.

iii) Εφαρμόζουμε για το σύστημα σφαίρα - ελατήριο - Γη την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας μεταξύ των θέσεων Α και Γ, θεωρώντας ότι στο οριζόντιο επίπεδο που περνά από το σημείο Γ, μηδενίζεται η δυναμική ενέργεια της σφαίρας, παίρνοντας:

$$K_A + U_{\beta,A} + U_{ελ,A} = K_\Gamma + U_{\beta,\Gamma} + U_{ελ,\Gamma} \rightarrow$$

$$0 + mgh + \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + 0 + \frac{1}{2}k(\Delta l_1)^2 \quad (1)$$

Όμως για την γωνία θ του σχήματος, έχουμε:

$$\eta\mu\theta = \frac{(AB)}{(OB)} = \frac{0,8m}{1m} = 0,8 \rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = 0,6 \rightarrow$$

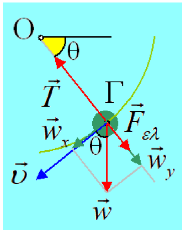
$$h = d\eta\mu\theta = 0,6 \cdot 0,8m = 0,48m$$

οπότε λύνοντας την εξίσωση (1), ως προς υ, βρίσκουμε για το μέτρο της ταχύτητας:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{k\left((\Delta l)^2 - (\Delta l_1)^2\right)}{m} + 2gh} = \sqrt{\frac{80\left(0,5^2 - 0,1^2\right)}{3} + 2 \cdot 10 \cdot 0,48}\ m/s \rightarrow$$

$$\upsilon = \sqrt{\frac{80 \cdot 0,24}{3} + 9,6}\ m/s = \sqrt{16}\ m/s = 4\ m/s$$

iv) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα στη θέση Γ, όπου το βάρος έχει αναλυθεί σε δύο συνιστώσες, μια παράλληλη στην ταχύτητα w_x και μια στην διεύθυνση της ακτίνας της κυκλικής τροχιάς w_y. Για τα μέτρα των δυνάμεων έχουμε:



$$w = mg = 3 \cdot 10N = 30N \quad \kappa\alpha\iota \quad F_{\varepsilon\lambda} = k\Delta l_1 = 80 \cdot 0,1N = 8N \text{ ενώ:}$$

$$\Sigma F_R = m\frac{\upsilon^2}{R} \rightarrow T - F_{\varepsilon\lambda} - w \cdot \eta\mu\theta = m\frac{\upsilon^2}{d} \rightarrow$$

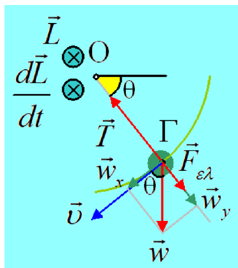
$$T = 8N + 30 \cdot 0,8N + 3\frac{4^2}{0,6}N = 112N$$

Λαμβάνοντας τώρα υπόψη ότι οι δυνάμεις που είναι κάθετες στην μετατόπιση (άρα στην θέση Γ στην ταχύτητα) δεν παράγουν έργο, θα έχουμε:

$$P_{F_{\varepsilon\lambda}} = |F_{\varepsilon\lambda}| \cdot |\upsilon| \cdot \sigma\upsilon\nu 90^\circ = 0 \quad \kappa\alpha\iota\ P_T = T \cdot |\upsilon| \cdot \sigma\upsilon\nu 90^\circ = 0 \quad \varepsilon\nu\acute{\omega}:$$

$$P_w = |w| \cdot |\upsilon| \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = 30 \cdot 4 \cdot 0,6W = 72W = P_{w_x}$$

v) Η στροφορμή της σφαίρας, ως προς το Ο, είναι οριζόντια κάθετη στο επίπεδο της κυκλικής τροχιάς στο κέντρο Ο, με φορά προς τα μέσα, όπως στο σχήμα, με μέτρο:



$$L_O = m\upsilon R = m\upsilon d = 3 \cdot 4 \cdot 0,6\ kgm^2/s = 7,2\frac{kgm^2}{s}$$

Την ίδια κατεύθυνση έχει πάνω στον ίδιο άξονα έχει και ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της παραπάνω στροφορμής, με μέτρο:

$$\left(\frac{dL}{dt}\right)_O = \Sigma\tau = \tau_w + \tau_{F_{\varepsilon\lambda}} + \tau_T = w_x \cdot d + 0 + 0 = w \cdot d \cdot \sigma\upsilon\nu\theta \rightarrow$$

$$\left(\frac{dL}{dt}\right)_O = 30 \cdot 0,6 \cdot 0,6\ kgm^2/s^2 = 10,8\frac{kgm^2}{s^2}$$

dmargaris@gmail.com