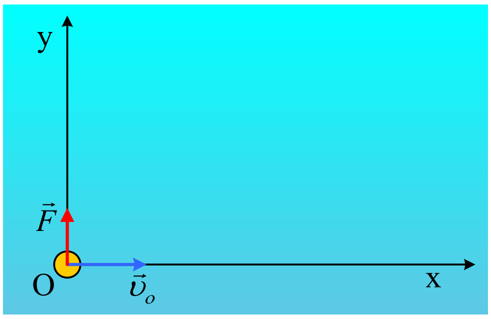
Δυο ελαστικές κρούσεις



Σε λείο οριζόντιο επίπεδο, στη θέση Ο, ηρεμεί μια σφαίρα Α μάζας m_1=2kg. Σε μια στιγμή t=0 η σφαίρα δέχεται κτύπημα, με αποτέλεσμα να αποκτήσει αρχική ταχύτητα μέτρου υ_o=3m/s, ενώ ταυτόχρονα δέχεται μια σταθερή δύναμη μέτρου F=1N, κάθετη στην αρχική ταχύτητα. Ας δεχτούμε το σημείο Ο ως αρχή ενός συστήματος αξόνων x,y όπου η αρχική ταχύτητα έχει την διεύθυνση του άξονα x και η δύναμη την διεύθυνση του άξονα y, όπως στο σχήμα. Τη στιγμή t_1=8s, η σφαίρα Α συγκρούεται ελαστικά με σφαίρα Β, μάζας m_2=3kg, ενώ η δύναμη F συνεχίζει να ασκείται πάνω της και μετά την κρούση. Οι σφαίρες είναι λείες και δεν αναπτύσσονται δυνάμεις τριβής, στη διάρκεια της κρούσης.

i) Αν η κρούση είναι κεντρική, ενώ μετά την κρούση η σφαίρα Α αποκτά μηδενική ταχύτητα:

α) Να βρεθεί η ταχύτητα της Β σφαίρας, ελάχιστα πριν την κρούση.

β) Να βρεθεί η θέση της σφαίρας Α την χρονική στιγμή t_2=10s.

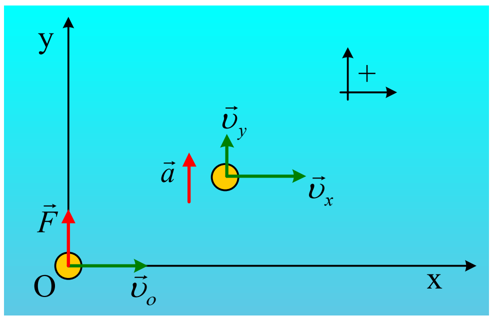
ii) Αν μετά την κρούση η σφαίρα έχει ταχύτητα ίση με την αρχική της ταχύτητα υ_o:

α) Να βρεθεί η ελάχιστη ταχύτητα της Β σφαίρας, λίγο πριν την κρούση.

β) Να βρεθεί η θέση της σφαίρας Α την χρονική στιγμή t_2=10s.

γ) Να συγκριθούν τα έργα της δύναμης F, από 0-t_1 και της δύναμης που ασκήθηκε στην Α σφαίρα κατά την κρούση.

Απάντηση:



i) Θεωρώντας τον προσανατολισμό των αξόνων, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, με βάση την αρχή της ανεξαρτησίας των κινήσεων, η σφαίρα Α θα εκτελέσει ευθύγραμμη ομαλή κίνηση στην διεύθυνση του άξονα x, ενώ θα αποκτήσει σταθερή επιτάχυνση:

$$F = m_1 a \rightarrow a = \frac{F}{m_1} = \frac{1}{2} m/s^2 = 0{,}5 m/s^2$$

στην διεύθυνση του y άξονα, εκτελώντας ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση. Έτσι (κατ΄αναλογία με την οριζόντια βολή), θα έχουμε τις εξισώσεις:

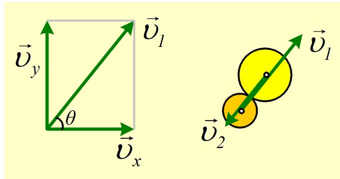
Άξονας x	Άξονας y
$\upsilon_x = \upsilon_o$ (1) $x = \upsilon_o t$ (2)	$\upsilon_y = at$ (3) $y = \frac{1}{2}at^2$ (4)

Έτσι τη χρονική στιγμή t_1=8s, η σφαίρα Α έχει συνιστώσες ταχύτητας υ_x=3m/s και υ_y=at=4m/s, ενώ βρίσκεται σε σημείο Α με συντεταγμένες (με αντικατάσταση στις εξισώσεις (2) και (4)):

$$x = \upsilon_o t = 3 \cdot 8m = 24m \quad \text{και} \quad y = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}5 \cdot 8^2 m = 16m$$

α) Με βάση τα παραπάνω, ελάχιστα πριν την κρούση η σφαίρα Α έχει ταχύτητα μέτρου υ_1, όπου:

$$\upsilon_1 = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} m/s = \sqrt{25} m/s = 5m/s$$



και με διεύθυνση, που σχηματίζει με την διεύθυνση x γωνία θ (βλέπε σχήμα), όπου $\varepsilon\varphi\theta = \frac{\upsilon_y}{\upsilon_x} = \frac{4}{3}$.

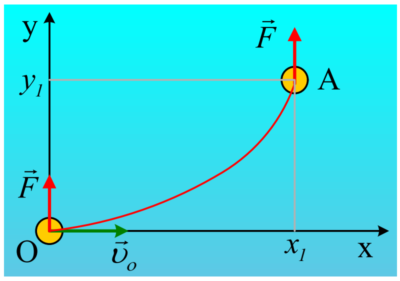
Στο σχήμα φαίνονται οι δυο σφαίρες στη διάρκεια της κρούσεις, όπου αφού η κρούση είναι κεντρική οι δυο ταχύτητες βρίσκονται στην ίδια ευθεία, περνώντας από τα κέντρα των δύο σφαιρών. Η ταχύτητα μετά την κρούση της Α σφαίρας δίνεται από την εξίσωση:

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_2 \xrightarrow{\upsilon_1'=0}$$

$$\upsilon_2 = -\frac{m_1 - m_2}{2m_2}\upsilon_1 = -\frac{2-3}{2 \cdot 3} \cdot 5 \, m/s = \frac{5}{6} m/s$$

με ίδια κατεύθυνση με την ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$ (αντίθετης φοράς από αυτήν που σχεδιάστηκε στο σχήμα!).

β) Αμέσως μετά την κρούση, η σφαίρα Α βρίσκεται στη θέση Α με συντεταγμένες $(x_1, y_1) = (24m, 16m)$ με μηδενική ταχύτητα. Πάνω της ασκείται η σταθερή δύναμη F, η οποία της προσδίδει ξανά την ίδια με παραπάνω επιτάχυνση. Έτσι ξεκινά μια νέα ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση στην διεύθυνση y, για την οποία η μετατόπιση δίνεται από την εξίσωση:

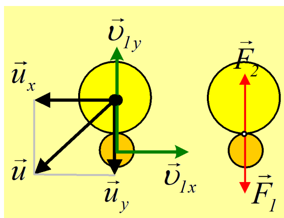


$$\Delta y = \frac{1}{2}a(\Delta t)^2 \xrightarrow{\Delta t = t_2 - t_1 = 2s} \Delta y = \frac{1}{2} \cdot 0{,}5 \cdot 2^2 m = 1m$$

Έτσι την στιγμή t_2 θα έχει φτάσει στην θέση $y_2 = y_1 + \Delta y = 17m$, με συντεταγμένες:

$$(x_2, y_2) = (24m, 17m)$$

ii) Αν μετά την κρούση η σφαίρα Α έχει ταχύτητα ίση με την υ_o, σημαίνει ότι λόγω κρούσης μηδενίστηκε η συνιστώσα της ταχύτητας υ_y, χωρίς να μεταβληθεί η συνιστώσα υ_x. Πράγμα που σημαίνει ότι τώρα έχουμε μια πλάγια κρούση, όπου στο σχήμα έχει σχεδιαστεί μια τυχαία ταχύτητα u για την σφαίρα Β, πριν την κρούση. Αλλά αφού οι σφαίρες είναι λείες, οι δυνάμεις στη διάρκεια της κρούσεις βρίσκονται πάνω στην διάκεντρο και μεταβάλλουν τις συνιστώσες ταχύτητας υ_{1y} και u_y, χωρίς να επηρεάζουν τις δυο άλλες συνιστώσες των ταχυτήτων.



α) Έτσι από την διατήρηση της ορμής στην διεύθυνση y, παίρνουμε:

$$m_1\upsilon_{1y}+m_2u_y=m_1\upsilon'_{1y}+m_2u'_y \ (5)$$

Ενώ από την διατήρηση της κινητικής ενέργειας, πριν και μετά την κρούση, παίρνουμε:

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2+\frac{1}{2}m_2u^2=\frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2+\frac{1}{2}m_2u'^2 \rightarrow$$

$$\cancel{\frac{1}{2}m_1\upsilon_{1x}^2}+\frac{1}{2}m_1\upsilon_{1y}^2+\cancel{\frac{1}{2}m_2u_x^2}+\frac{1}{2}m_2u_y^2=\cancel{\frac{1}{2}m_1\upsilon_{1x}'^2}+\frac{1}{2}m_1\upsilon_{1y}'^2+\cancel{\frac{1}{2}m_2u_x'^2}+\frac{1}{2}m_2u_y'^2 \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_{1y}^2+\frac{1}{2}m_2u_y^2=\frac{1}{2}m_1\upsilon_{1y}'^2+\frac{1}{2}m_2u_y'^2 \quad (6)$$

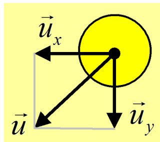
Το σύστημα των εξισώσεων (5) και (6) περιγράφει μια κεντρική ελαστική κρούση στην διεύθυνση y, οπότε ισχύουν οι γνωστές λύσεις από την θεωρία:

$$\upsilon'_{1y}=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_{1y}+\frac{2m_2}{m_1+m_2}u_y \quad \text{και } u'_y=\frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_{1y}+\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}u_y$$

θέτοντας $\upsilon'_{1y}=0$ στην πρώτη, παίρνουμε:

$$u_y=-\frac{m_1-m_2}{2m_2}\upsilon_{1y}=-\frac{2-3}{2\cdot 3}4\,m/s=\frac{2}{3}\,m/s$$

Λαμβάνοντας υπόψη μας το διπλανό σχήμα για τις συνιστώσες της ταχύτητας u, βλέπουμε ότι η ελάχιστη δυνατή ταχύτητα της σφαίρας Β, είναι αυτή όπου u_x=0, (η υποτείνουσα είναι πάντα μεγαλύτερη από την κάθετη πλευρά στο ορθογώνιο τρίγωνο), οπότε:



$$u_{min}=u_y=\frac{2}{3}\,m/s$$

β) Και τώρα μετά την κρούση η Α σφαίρα θα εκτελέσει επιταχυνόμενη κίνηση στην διεύθυνση y, όπως και πριν, με αποτέλεσμα να μετατοπισθεί κατά Δy=1m μέχρι τη στιγμή t_2, φτάνοντας στην θέση $y'_2=17m$, αλλά τώρα μετατοπίζεται και στην διεύθυνση x, κατά $\Delta x=\upsilon_{1x}\Delta t=3\cdot 2m=6m$, οπότε φτάνει στην θέση:

$$(x'_2,y'_2)=(30m,17m)$$

γ) Εφαρμόζουμε για την σφαίρα Α το Θ.Μ.Κ.Ε, από την στιγμή t=0, μέχρι τη στιγμή αμέσως μετά την κρούση και θεωρώντας F_k, την δύναμη στη διάρκεια της κρούσης, από την σφαίρα Β, παίρνουμε:

$$K_\tau-K_\alpha=W_w+W_N+W_F+W_{F_k} \xrightarrow{W_w=W_N=0}$$

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_o^2-\frac{1}{2}m_1\upsilon_o^2=W_F+W_{F_k} \rightarrow$$

$$W_{F_k}=-W_F$$

Τα δύο δηλαδή έργα είναι αντίθετα! Όση ενέργεια πήρε η σφαίρα μέσω του έργου της ασκούμενης δύναμης F, τόση ενέργεια μετέφερε στην Β σφαίρα στη διάρκεια της κρούσης.

Σχόλιο:

Και αν κάποιος ήθελε να υπολογίσει τα παραπάνω έργα;

$$W_F = F \cdot \Delta y = 1 \cdot 16J = 16J$$

Οπότε και:

$$W_{F_k} = -16J$$

dmargaris@gmail.com