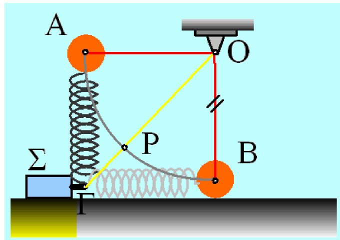
Από κίνηση σε τεταρτοκύκλιο, σε ταλάντωση

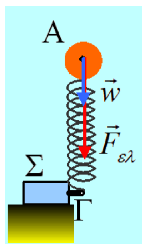


Μια μικρή σφαίρα μάζας m=0,7kg, η οποία θεωρείται υλικό σημείο, συγκρατείται στη θέση Α του σχήματος, δεμένη στο άκρο οριζόντιου νήματος μήκους d=0,5m, το άλλο άκρο του οποίου έχει δεθεί στο σημείο Ο. Η σφαίρα έχει επίσης δεθεί στο άκρο ενός ιδανικού κατακόρυφου ελατηρίου φυσικού μήκους l_o=0,2m και σταθεράς k=100N/m. Το άλλο άκρο Γ του ελατηρίου δένεται σε σώμα Σ, μάζας Μ, το οποίο εμφανίζει με το επίπεδο συντελεστές τριβής $\mu=\mu_s$=0,5. Σε μια στιγμή αφήνεται η σφαίρα να κινηθεί, οπότε φτάνοντας στη θέση Β, όπου το νήμα γίνεται κατακόρυφο (και το ελατήριο οριζόντιο), κόβουμε το νήμα, ενώ η σφαίρα συνεχίζει την κίνησή της σε ένα λείο οριζόντιο επίπεδο (χωρίς να έχουμε φαινόμενο κρούσης…).

i) Να υπολογιστεί η αρχική επιτάχυνση της σφαίρας, μόλις αφεθεί να κινηθεί στην θέση Α.
ii) Να αποδειχθεί ότι η σφαίρα έχει μέγιστη μηχανική ενέργεια κατά την κίνησή της στο άκρο του νήματος, στη θέση Ρ, όπου ο άξονας του ελατηρίου, περνά από το Ο. Να υπολογιστεί η μέγιστη αυτή μηχανική ενέργεια της σφαίρας, θεωρώντας το οριζόντιο επίπεδο, ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας.
iii) Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου, τη στιγμή που κόβουμε το νήμα.
iv) Αφού βρεθεί το πλάτος της ταλάντωσης που θα εκτελέσει η σφαίρα στο οριζόντιο επίπεδο, να υπολογιστεί η ελάχιστη μάζα του σώματος Σ, ώστε να μην ολισθήσει.

Δίνεται g=10m/s², ενώ $\sqrt{2} \approx 1,4$

Απάντηση:



i) Στο διπλανό σχήμα, έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα στην αρχική θέση Α, όταν αφήνεται να κινηθεί. Το σχήμα ΑΓΒΟ είναι τετράγωνο, άρα το ελατήριο έχει μήκος d και παραμόρφωση $\Delta l = d - l_o$=0,3m. Έτσι από με εφαρμογή του 2ου νόμου του Νεύτωνα, για την στιγμή αυτή, παίρνουμε:

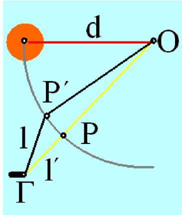
$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \rightarrow F_{\varepsilon\lambda} + mg = ma \rightarrow k\Delta l + mg = ma \rightarrow$$
$$a = \frac{k\Delta l}{m} + g = \frac{100 \cdot 0,3}{0,7} m/s^2 + 10 m/s^2 \approx 52,9 m/s^2$$

με κατακόρυφη διεύθυνση και φορά προς τα κάτω.

ii) Για την διαγώνιο ΟΓ του τετραγώνου έχουμε:

$$(O\Gamma) = \sqrt{(OA)^2 + (A\Gamma)^2} = \sqrt{d^2 + d^2} = d\sqrt{2} \rightarrow$$
$$l' = (O\Gamma) - d = d\sqrt{2} - d = d(\sqrt{2} - 1) = 0,5(1,4 - 1)m = 0,2m$$

όπου l' το μήκος του ελατηρίου στην θέση αυτή, ίσο με το φυσικό μήκος του l_o! Αλλά τότε στη θέση αυτή το ελατήριο δεν έχει δυναμική ενέργεια. Σε κάθε άλλη θέση, όπως στην θέση Ρ΄, το ελατήριο θα έχει μεγαλύτερο μήκος, αφού η ευθεία είναι η «συντομοτέρα οδός»:



$$ΓP' + P'O > ΓP + PO \rightarrow$$
$$l + d > l' + d \rightarrow l > l' = 0,2m$$

Σε κάθε άλλη θέση της σφαίρας δηλαδή το ελατήριο θα έχει κάποια επιμήκυνση και άρα θα έχει και κάποια δυναμική ενέργεια.

Αλλά από την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας για το σύστημα, μεταξύ της θέσης Α και της τυχαίας θέσης Ρ΄, θα παίρνουμε:

$$K_{αρχ} + U_{β,αρχ} + U_{ελ,αρχ} = K'_{τελ} + U'_{β,τελ} + U'_{ελ,τελ} \rightarrow$$
$$0 + mgd + \frac{1}{2}k(Δl_o)^2 = E_{μ/P} + \frac{1}{2}k(Δl_i)^2 \rightarrow$$
$$E_{μ/P'} = mgd + \frac{1}{2}k(Δl_o)^2 - \frac{1}{2}k(Δl_i)^2$$

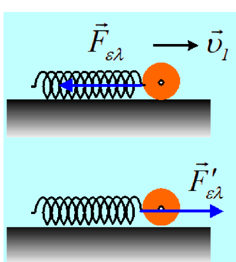
Παρατηρούμε δηλαδή ότι η σφαίρα θα έχει την μέγιστη μηχανική ενέργεια, στην θέση όπου το ελατήριο θα έχει την ελάχιστη δυναμική ενέργεια και αυτή δεν είναι παρά η θέση Ρ, όπου το ελατήριο έχει το φυσικό μήκος του.

Με αντικατάσταση στην τελευταία σχέση, παίρνουμε:

$$E_{μ/P} = mgd + \frac{1}{2}k(Δl_o)^2 - \frac{1}{2}k(Δl_i)^2 \xrightarrow{Δl_i=0}$$
$$E_{μ/max} = 0,7 \cdot 10 \cdot 0,5J + \frac{1}{2}100 \cdot 0,3^2 J = 8J$$

iii) Η σφαίρα φτάνει στο οριζόντιο επίπεδο με μια οριζόντια ταχύτητα μέτρου $υ_1$, το μέτρο της οποίας υπολογίζεται με εφαρμογή της ΑΔΜΕ, μεταξύ των θέσεων Α και Β για το σύστημα σφαίρα-ελατήριο, λαμβάνοντας υπόψη ότι και στη θέση Β το ελατήριο έχει την ίδια επιμήκυνση Δl=0,3m:

$$K_A + U_{β,A} + U_{ελ,A} = K_B + U_{β,B} + U_{ελ,B} \xrightarrow{U_{β,B}=0}$$
$$0 + mgd + \frac{1}{2}k(Δl_o)^2 = \frac{1}{2}mυ_1^2 + \frac{1}{2}k(Δl_o)^2 \rightarrow$$
$$υ_1 = \sqrt{2gd} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0,5}m/s = \sqrt{10}m/s$$



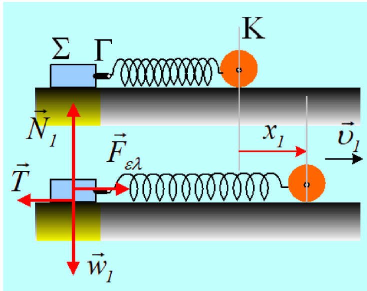
Στο σχήμα έχει σχεδιαστεί η δύναμη που το ελατήριο ασκεί στη σφαίρα, με μέτρο $F_{ελ}$=30Ν (ίδια επιμήκυνση με την κατακόρυφη θέση, συνεπώς ίδια δύναμη, μέτρου $F_{ελ}$=k·Δl). Η αντίδρασή της $F'_{ελ}$ ασκείται στο άκρο του ελατηρίου από την σφαίρα, έχοντας την ίδια κατεύθυνση με την ταχύτητα της σφαίρας, άρα και με την ταχύτητα του άκρου του ελατηρίου. Αλλά η μεταβολής της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου οφείλεται στο έργο της δύναμης $F'_{ελ}$ που του ασκεί η ράβδος, οπότε:

$$\frac{dU_{ελ}}{dt} = \frac{|F'_{ελ}| \cdot |dx| \cdot συν0^o}{dt} = |F'_{ελ}| \cdot |υ_1| = 30 \cdot \sqrt{10}J/s$$

iv) Μόλις κοπεί το νήμα και ενώ η σφαίρα βρίσκεται πάνω στο οριζόντιο λείο επίπεδο, δεμένη στο άκρο ενός ιδανικού ελατηρίου, θα ακολουθήσει μια απλή αρμονική ταλάντωση, γύρω από την θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου (θέση Κ), με αρχική απομάκρυνση $x_1=\Delta l=0,3m$ και αρχική ταχύτητα υ_1. Έτσι από την ενέργεια ταλάντωσης παίρνουμε:

$$\frac{1}{2}kx_1^2+\frac{1}{2}m\upsilon_1^2=\frac{1}{2}kA^2 \rightarrow$$

$$A=\sqrt{\frac{m\upsilon_1^2}{\kappa}+x_1^2}=\sqrt{\frac{0,7\cdot 10}{100}+0,3^2}\,m=\sqrt{0,07+0,09}\,m=0,4m$$



Στο σχήμα, έχουν σημειωθεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ, όπου αν το ελατήριο έχει επιμήκυνση (θα έχουμε προφανώς και χρονικά διαστήματα ίσα με Τ/2 με συσπειρωμένο ελατήριο), ασκεί δύναμη $F_{ελ}$ προς τα δεξιά, οπότε για να μην μετακινείται το σώμα Σ, θα δέχεται και δύναμη στατικής τριβής, με φορά προς τα αριστερά. Η μέγιστη δύναμη που θα ασκηθεί από το ελατήριο θα έχει μέτρο $|F_{ελ,max}|=kA=100\cdot 0,4N=40N$. Συνεπώς το ίδιο μέτρο θα πρέπει να έχει και η στατική τριβή $T_{s,max}$=40N. Η τριβή όμως αυτή θα πρέπει να είναι μικρότερη ή ίση της οριακής, δηλαδή:

$$T_s\le T_{op}\rightarrow T_{s,max}\le\mu_s\cdot N_1\xrightarrow{N_1=Mg}T_{s,max}\le\mu_s\cdot Mg\rightarrow$$

$$M\ge\frac{T_{s,max}}{\mu_s g}\rightarrow M\ge\frac{40}{0,5\cdot 10}kg\rightarrow M\ge 8kg$$

Η ελάχιστη δηλαδή μάζα που πρέπει να έχει το σώμα Σ, ώστε να μην ολισθήσει στην διάρκεια της ταλάντωσης της σφαίρας, είναι τα 8kg.

dmargaris@gmail.com