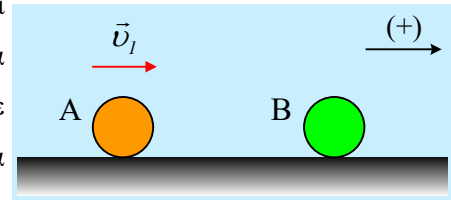


Κεντρικές ελαστικές κρούσεις

Δυο μικρές σφαίρες A και B, με ίσες ακτίνες και με μάζες $m_1=3m$ και $m_2=m$ κινούνται στην ίδια ευθεία σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Η σφαίρα A κινείται προς τα δεξιά (όπου ορίζουμε την θετική κατεύθυνση) με σταθερή ταχύτητα $v_1=4\text{m/s}$ και κάποια στιγμή συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με την σφαίρα B.



- i) Ποιες οι δυνατές τιμές ταχύτητας της σφαίρας B, ώστε να έχουμε κρούση μεταξύ των δύο σφαιρών;
- ii) Να βρείτε μια σχέση που να δίνει την ταχύτητα της σφαίρας A μετά την κρούση, σε συνάρτηση με την ταχύτητα της σφαίρας B, πριν την κρούση, κάνοντας και την γραφική της παράσταση ($v_1' = f(v_2)$). Στο διάγραμμα να σημειωθούν χαρακτηριστικές τιμές για τις ταχύτητες των δύο σφαιρών.
- iii) Να υπολογιστεί η ταχύτητα της σφαίρας B v_2 πριν την κρούση, αν η σφαίρα A χάνει το 75% της κινητικής της ενέργειας κατά την κρούση.
- iv) Να βρεθεί η κινητική ενέργεια της B σφαίρας μετά την κρούση, αν κατά την κρούση η σφαίρα A χάνει το 100% της κινητικής της ενέργειας, ενώ $m=1\text{kg}$.

Απάντηση:

- i) Για να υπάρξει κρούση μεταξύ των δύο σφαιρών, θα πρέπει, κάποια στιγμή, η A σφαίρα να προφτάσει την σφαίρα B. Αυτό θα συμβεί αν η ταχύτητα της A σφαίρας είναι μεγαλύτερη, έστω κατ'ελάχιστον, από την ταχύτητα της B σφαίρας. Αλλά τότε η B σφαίρα πρέπει να έχει ταχύτητα:

$$v_2 < v_1 \quad \text{ή} \quad v_2 < 4\text{m/s}$$

- ii) Η ταχύτητα της σφαίρας A, μετά την κρούση, υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2$$

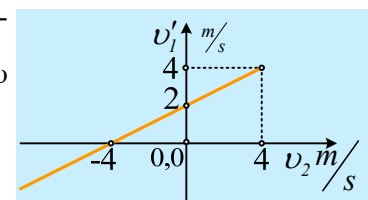
Με αντικατάσταση στην παραπάνω σχέση, παίρνουμε:

$$v_1' = \frac{3m - m}{3m + m} 4 + \frac{2m}{3m + m} v_2 = 2 + \frac{1}{2} v_2 \quad (1) \quad (\text{μονάδες στο S.I.})$$

Αφού λάβουμε υπόψη ότι $v_2 < 4\text{m/s}$, ενώ:

$$\text{για } v_2=0 \text{ παίρνουμε } v_1' = 2\text{m/s} \text{ και } v_1' = 0, \text{ όταν } v_2 = -4\text{m/s},$$

χαράσσουμε το διπλανό διάγραμμα $v_1' = f(v_2)$, όπου αξίζει να επισημανθεί ότι το σημείο $(4\text{m/s}, 4\text{m/s})$ δεν περιλαμβάνεται στην ημιευθεία που σχεδιάσαμε.



- iii) Το ποσοστό απώλειας της κινητικής ενέργειας της A σφαίρας, γράφεται:

$$\pi\% = \frac{K_{\text{αρχ}} - K_{\text{τελ}}}{K_{\text{αρχ}}} 100\% \rightarrow$$

$$75 = \frac{\frac{1}{2}m_1v_1^2 - \frac{1}{2}m_1v_1'^2}{\frac{1}{2}m_1v_1^2} 100 \rightarrow$$

$$0,75 = \frac{v_1^2 - v_1'^2}{v_1^2} \rightarrow v_1'^2 = 0,25v_1^2 \rightarrow |v_1'| = 0,5v_1 = 2m/s \rightarrow$$

$$v_1' = \pm 2m/s$$

α) Αν $v_1' = 2m/s$, με αντικατάσταση στην σχέση (1) παίρνουμε για την ταχύτητα $v_{2,1}$ της Β σφαίρας πριν την κρούση:

$$v_1' = 2 + \frac{1}{2}v_{2,1} \rightarrow 2 = 2 + \frac{1}{2}v_{2,1} \rightarrow v_{2,1} = 0$$

β) Αν $v_1' = -2m/s$, με αντικατάσταση στην σχέση (1) παίρνουμε αντίστοιχα για την ταχύτητα $v_{2,2}$:

$$v_1' = 2 + \frac{1}{2}v_{2,2} \rightarrow -2 = 2 + \frac{1}{2}v_{2,2} \rightarrow v_{2,2} = -8m/s$$

iv) Αν η Α σφαίρα χάσει όλη την κινητική της ενέργεια, αυτό σημαίνει ότι θα έχει τελικά μηδενική ταχύτητα και από την σχέση (1) παίρνουμε, για την ταχύτητα $v_{2,3}$ της Β σφαίρας πριν την κρούση:

$$v_1' = 2 + \frac{1}{2}v_{2,3} \rightarrow 0 = 2 + \frac{1}{2}v_{2,3} \rightarrow v_{2,3} = -4m/s$$

(η ταχύτητα αυτή έχει υπολογιστεί και κατά την χάραξη της γραφικής παράστασης $v_1' = f(v_2)$).

Οπότε από την διατήρηση της κινητικής ενέργειας (πριν και μετά την κρούση) παίρνουμε:

$$K_{1,αρχ} + K_{2,αρχ} = K_{1,τελ} + K_{2,τελ} \rightarrow$$

$$K_{2,τελ} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2,3}^2 = \frac{1}{2}3 \cdot 4^2 J + \frac{1}{2}1 \cdot 4^2 J = 32J$$

Εναλλακτικά, υπολογίζουμε την ταχύτητα της Β σφαίρας μετά την κρούση:

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}v_{2,3} = \frac{2 \cdot 3}{3 + 1}4m/s + \frac{1 - 3}{3 + 1}(-4)m/s = 8m/s$$

Οπότε η κινητική της ενέργεια θα είναι ίση:

$$K_{2,τελ} = \frac{1}{2}m_2v_2'^2 = \frac{1}{2}1 \cdot 8^2 J = 32J$$

dmargaris@gmail.com