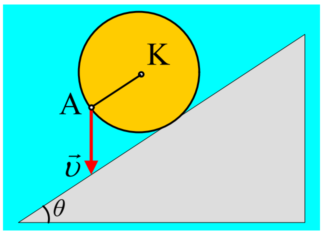
Τρεις ερωτήσεις κινηματικής στερεού



1) Ένας τροχός κινείται κατά μήκος ενός κεκλιμένου επιπέδου κλίσεως θ=45°. Σε μια στιγμή του σημείο Α, στο άκρο μιας ακτίνας ΟΑ παράλληλης στο επίπεδο, έχει κατακόρυφη ταχύτητα $\vec{\upsilon}$, όπως στο σχήμα. Τι κίνηση κάνει ο τροχός;

   i) Κυλίεται προς τα πάνω, κατά μήκος του επιπέδου.

   ii) Κινείται προς τα πάνω ενώ στρέφεται αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού.

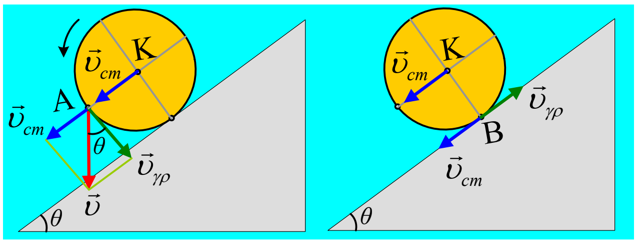
   iii) Κυλίεται προς τα κάτω, κατά μήκος του επιπέδου.

   iv) Κινείται προς τα κάτω, εκτελώντας σύνθετη κίνηση, ενώ παρατηρείται ολίσθηση.

   Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Απάντηση:

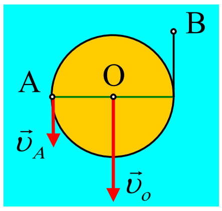
Θεωρούμε την κίνηση του τροχού σύνθετη. Μια μεταφορική και μια στροφική γύρω από οριζόντιο άξονα, κάθετο στο επίπεδο του σχήματος που περνά από το κέντρο Κ.



Αναλύουμε την ταχύτητα του σημείου Α σε δυο συνιστώσες, μια παράλληλη στο επίπεδο και μια εφαπτομενική. Τότε η παράλληλη στο επίπεδο, θα είναι ίση με την ταχύτητα του κέντρου Κ του τροχού την υ_{cm}, ενώ η εφαπτομενική συνιστώσα $\upsilon_{\gamma\rho}=\omega R$, οφείλεται στην περιστροφική κίνηση του τροχού. Η γωνία μεταξύ υ και $\upsilon_{\gamma\rho}$ είναι ίση με την κλίση του επιπέδου θ, αφού πρόκειται για οξείες γωνίες με κάθετες πλευρές. Αλλά τότε το παραλληλόγραμμο των ταχυτήτων είναι τετράγωνο και για τα μέτρα των δύο ταχυτήτων θα ισχύει:

$$\upsilon_{cm} = \upsilon_{\gamma\rho} = \omega R$$

Αν τώρα έρθουμε στο δεξιό σχήμα και στο σημείο Β επαφής του τροχού με το έδαφος, θα έχει τις ταχύτητες που έχουν σχεδιαστεί στο σχήμα και $\upsilon_B=0$, οπότε ο τροχός κυλίεται (χωρίς να ολισθαίνει) και σωστή είναι η πρόταση iii).



2) Στο σχήμα έχουμε ένα ομογενές γιο-γιο που κινείται σε κατακόρυφο επίπεδο, ενώ το σημείο Β, είναι το άκρο του τυλιγμένου νήματος, έχοντας κατακόρυφη ταχύτητα. Αν για τα μέτρα των ταχυτήτων του κέντρου Ο και του σημείου Α, στο άκρο μιας οριζόντιας διαμέτρου έχουμε υ_o=2m/s και υ_A=1m/s, τότε για την ταχύτητα του άκρου Β του νήματος θα έχουμε:

i) Έχει ταχύτητα προς τα πάνω, μέτρου υ=1m/s.

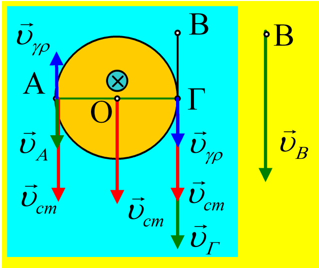
ii) Έχει ταχύτητα προς τα κάτω, μέτρου υ=1m/s.

iii) Έχει ταχύτητα προς τα κάτω, μέτρου υ=3m/s.

iv) Έχει ταχύτητα προς τα κάτω, μέτρου υ=1m/s.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Απάντηση:



Θεωρώντας σύνθετη την κίνηση του κυλίνδρου (γιο- γιο), λόγω μεταφορικής κίνησης, κάθε σημείο έχει ταχύτητα ίση με αυτήν του κέντρου Ο, ενώ το σημείο Α, λόγω περιστροφής γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το Ο, θα έχει και μια επιπλέον ταχύτητα $\upsilon_{\gamma\rho}=\omega R$. Αλλά αφού $\upsilon_A<\upsilon_o$, η γραμμική ταχύτητα του Α, έχει αντίθετη κατεύθυνση από την υ_o, έχει δηλαδή κατακόρυφη κατεύθυνση προς τα πάνω, όπως στο διπλανό σχήμα. Για το μέτρο της έχουμε:

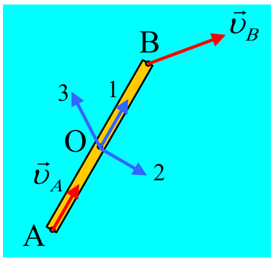
$$\upsilon_A = \upsilon_{cm} - \upsilon_{\gamma\rho} \rightarrow \upsilon_{\gamma\rho} = \omega R = \upsilon_{cm} - \upsilon_A = 2m/s - 1m/s = 1m/s$$

Τότε όμως συμπεραίνουμε ότι ο κύλινδρος στρέφεται ωρολογιακά (η γωνιακή ταχύτητα είναι κάθετη στο επίπεδό του με φορά προς τα μέσα), με αποτέλεσμα η γραμμική ταχύτητα του σημείου Γ, στο οποίο καταλήγει το νήμα, να έχει φορά προς τα κάτω, Έτσι για την ταχύτητα του Γ έχουμε:

$$\upsilon_\Gamma = \upsilon_{cm} + \upsilon_{\gamma\rho} = \upsilon_{cm} + \omega R = 2m/s + 1m/s = 3m/s$$

Όμως όλα τα σημεία του νήματος, μεταξύ του Γ και του άκρου Β, κινούνται με την ίδια ταχύτητα, οπότε και το Β έχει κατακόρυφη ταχύτητα, με κατεύθυνση προς τα κάτω και μέτρο υ_B=3m/s. Σωστό το iii).

3) Μια ομογενής σανίδα ΑΒ κινείται οριζόντια σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Σε μια στιγμή τα άκρα της έχουν τις ταχύτητες που έχουν σημειωθεί στο σχήμα. Ποιο διάνυσμα, το 1, το 2 ή το 3 μπορεί να παριστάνει την ταχύτητα του μέσου Ο της ράβδου:

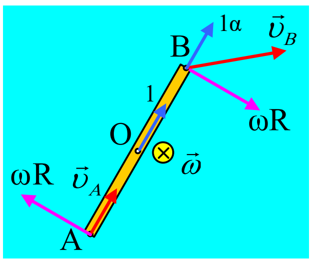


i) το 1, ii) το 2, iii) το 3, iv) Κανένα από αυτά.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Απάντηση:

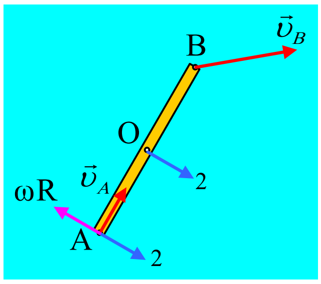
Η κίνηση της σανίδας είναι σύνθετη, αφού αν ήταν μόνο μεταφορική τα άκρα Α και Β θα είχαν ίσες ταχύτητες, ενώ αν ήταν μόνο στροφική η ταχύτητα του Α θα ήταν κάθετη στην ΑΒ.



i) Έστω ότι η ταχύτητα του κέντρου μάζας Ο ήταν όπως το διάνυσμα 1. Τότε την ίδια ταχύτητα, λόγω μεταφορικής κίνησης θα έχει και το άκρο Β (στο σχήμα το διάνυσμα 1α). Όμως τότε για να είναι αυτή η ταχύτητα του άκρου Β, η υ_B, θα πρέπει η σανίδα να έχει και γωνιακή ταχύτητα κάθετη στο επίπεδο με φορά προς τα μέσα, ώστε η συνισταμένη των δύο ταχυτήτων 1α και της γραμμικής ταχύτητας ωR, να μας δίνουν την $υ_B$.

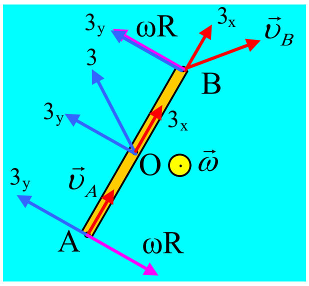
Αυτό όμως δεν μπορεί να ισχύει, αφού αντίθετη γραμμική ταχύτητα θα είχε και το άκρο Α, με αποτέλεσμα η ταχύτητά του να μην κατευθύνεται προς το Β. Η ταχύτητα 1. απορρίπτεται.

ii) Έστω ότι η ταχύτητα του Ο, είναι όπως το διάνυσμα 2. Αυτό θα μπορούσε να ισχύει αρκεί η σανίδα να στρέφεται, με αποτέλεσμα το άκρο Α να έχει και γραμμική ταχύτητα αντίθετη της 2, με μέτρο ωR.



Όμως τότε κατά μήκος της σανίδας, θα είχαμε τα σημεία Α και Ο με διαφορετικές ταχύτητες, πράγμα που θα οδηγούσε σε μείωση της απόστασης μεταξύ τους, πράγμα που δεν μπορεί να συμβεί (να μειωθεί το μήκος της σανίδας). Η περίπτωση απορρίπτεται.

iii) Έστω ότι η ταχύτητα του Ο, είναι όπως το διάνυσμα 3. Αυτή αναλύεται σε δύο συνιστώσες, μια παράλληλη στον κατά μήκος άξονα της σανίδας 3x, ίση με την ταχύτητα $υ_A$ και μια 3y, κάθετη στη σανίδα,

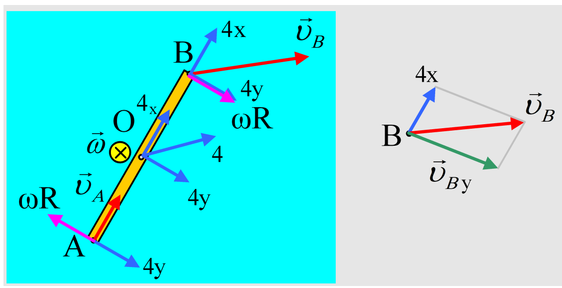


όπως στο σχήμα. Τότε όμως την ταχύτητα 3y, θα την είχαν όλα τα σημεία της σανίδας, συνεπώς το άκρο Α θα πρέπει να έχει και γραμμικής ταχύτητα $υ_{γρ}$=ωR, αντίθετη της 3y, ώστε να απομένει μόνο η συνιστώσα $υ_A$=3x. Αλλά τότε ερχόμενοι στο άκρο Β, αυτό θα έχει, λόγω μεταφορικής κίνησης και τις δυο συνιστώσες 3x και 3y, αλλά και την γραμμική ταχύτητα ωR, όπως στο σχήμα. Τότε όμως η συνολική ταχύτητα θα ήταν πλάγια αριστερά και σε καμιά περίπτωση όπως έχει σημειωθεί. Και η περίπτωση αυτή απορρίπτεται.

iv) Δεν απομένει παρά να είναι σωστή η πρόταση iv).

Σχόλιο:

Και αν θέλουμε να διερευνήσουμε ποια είναι η ταχύτητα του μέσου Ο της σανίδας; Αρκεί να δούμε το διπλανό σχήμα. Η ταχύτητα του Ο, είναι όπως το διάνυσμα 4, οπότε για να εξουδετερώνεται η 4y στο άκρο Α, θα πρέπει να δεχτούμε περιστροφή, όπως στο σχήμα. Αλλά τότε το άκρο Β θα έχει και τις δυο συνιστώσες 4x και 4y της ταχύτητας, λόγω μεταφορικής κίνησης, ενώ η γραμμική ταχύτητα $υ_{γρ}$=ωR θα



έχει την ίδια κατεύθυνση με την 4y. Στο διπλανό σχήμα δείχνεται το πώς προκύπτει η ταχύτητα του άκρου Β, με διανυσματική πρόσθεση...

dmargaris@gmail.com