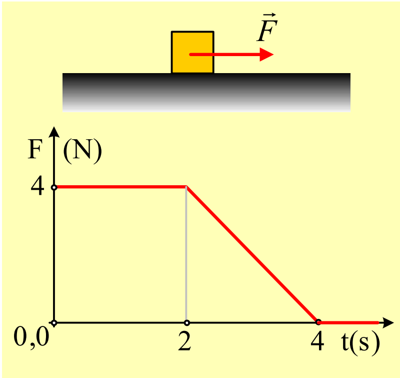
Μεταβλητή δύναμη και ορμή



Ένα σώμα Α μάζας m= 2kg βρίσκεται ακίνητο σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Σε μια στιγμή δέχεται την επίδραση μεταβλητής οριζόντιας δύναμης F, το μέτρο της οποίας μεταβάλλεται, όπως στο διάγραμμα, ενώ η προς τα δεξιά κατεύθυνση θεωρείται θετική.

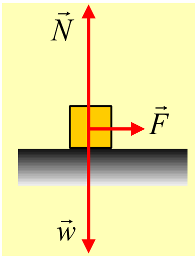
i) Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της ορμής και ποια η ορμή του σώματος, τη στιγμή t_1=1s.

ii) Ποια η μεταβολή της ορμής από τη στιγμή t_1, μέχρι τη στιγμή t_2=2s;

iii) Να υπολογιστεί η ταχύτητα του σώματος τη στιγμή t_3=4s, καθώς και το συνολικό έργο της δύναμης F.

iv) Τη στιγμή t_3, όπου μηδενίζεται η ασκούμενη δύναμη F, το σώμα Α συγκρούεται πλαστικά με ένα δεύτερο σώμα Β, μάζας Μ=3kg το οποίο κινείται, στην ίδια ευθεία, με αντίθετη κατεύθυνση και με ταχύτητα u_B=8m/s. Να υπολογιστεί η μεταβολή της ορμής του σώματος Α, η οποία οφείλεται στην κρούση.

Απάντηση:



i) Σύμφωνα με το γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \Sigma\vec{F} = \vec{F}$$

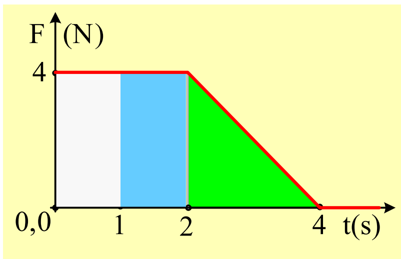
Αφού το σώμα ισορροπεί στην κατακόρυφη διεύθυνση y, οπότε ο ρυθμός μεταβολής της ορμής τη στιγμή t_1=1s έχει την κατεύθυνση της δύναμης F και μέτρο:

$$\frac{dp}{dt} = F = 4\frac{kg \cdot m}{s}$$

Ο παραπάνω ρυθμός είναι σταθερός για το χρονικό διάστημα 0-2s, όπου η δύναμη παραμένει σταθερή, συνεπώς συμπίπτει και με το μέσο ρυθμό μεταβολής της ορμής:

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{dp}{dt} = F \rightarrow \Delta p = F \cdot \Delta t \rightarrow p_1 - p_o = F \cdot \Delta t \xrightarrow{p_o=0}$$

$$p_1 = F \cdot \Delta t = 4 \cdot 1kg \cdot m/s = 4kg \cdot m/s$$



Αξίζει να επισημανθεί ότι η παραπάνω μεταβολή της ορμής του σώματος είναι αριθμητικά ίση και με το εμβαδόν του γκρι ορθογωνίου στο διπλανό διάγραμμα F-t.

ii) Με την ίδια λογική η μεταβολή της ορμής από t_1=1s έως t_2=2s είναι αριθμητικά ίση με το εμβαδόν του γαλάζιου ορθογωνίου:

$$\Delta p_{1,2} = F \cdot \Delta t = 4 \cdot 1kg \cdot m/s = 4kg \cdot m/s$$

με κατεύθυνση ίδια με την ασκούμενη δύναμη.

iii) Δουλεύοντας ξανά με τα εμβαδά, από 0-4s η μεταβολή της ορμής, είναι αριθμητικά ίση με το εμβαδόν του τραπεζίου (ή αν προτιμάτε των δύο ορθογωνίων και του πράσινου τριγώνου), οπότε:

$$\Delta p_{1,2} = p_2 - p_o = \frac{B+\beta}{2}\upsilon \rightarrow p_2 - 0 = \frac{4+2}{2}\cdot 4\frac{kgm}{s} \rightarrow$$

$$m\upsilon_2 = 12\frac{kgm}{s} \rightarrow \upsilon_2 = 6m/s$$

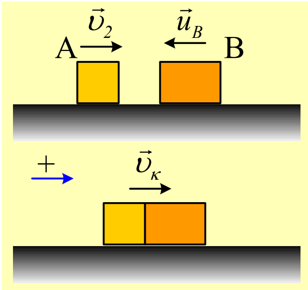
Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε, από 0-4s για το σώμα Α και παίρνουμε:

$$K_2 - K_o = W_F + W_w + W_N \xrightarrow{W_w = W_N = 0}$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_2^2 - 0 = W_F \rightarrow$$

$$W_F = \frac{1}{2}2\cdot 6^2 J = 36J$$

iv) Εφαρμόζουμε για την πλαστική κρούση, της αρχή διατήρηση της ορμής, για το σύστημα των δύο σωμάτων, οπότε έχουμε:



$$\vec{p}_{\pi\rho} = \vec{p}_{\mu\varepsilon\tau} \rightarrow$$

$$m\vec{\upsilon}_2 + M\vec{u}_B = (m+M)\vec{\upsilon}_\kappa \xrightarrow{\alpha\lambda\gamma\varepsilon\beta\rho\iota\kappa\acute{\alpha}}$$

$$\upsilon_\kappa = \frac{m\upsilon_2 + Mu_B}{m+M} = \frac{2\cdot 6 + 3(-8)}{2+3}m/s = -2,4m/s$$

όπου η αρνητική αλγεβρική τιμή της κοινής ταχύτητας, μας λέει ότι αυτή κατευθύνεται προς τα αριστερά.

Οπότε για την μεταβολή της ορμής του Α σώματος στη διάρκεια της κρούσης, έχουμε:

$$\Delta\vec{p}_A = \vec{p}_{A,\mu} - \vec{p}_{A,\pi} \xrightarrow{\alpha\lambda\gamma\varepsilon\beta\rho\iota\kappa\acute{\alpha}}$$

$$\Delta p_A = m\upsilon_\kappa - m\upsilon_2 = 2\left((-2,4)-6\right)\frac{kgm}{s} = -16,8\frac{kgm}{s}$$

Ξανά η αρνητική τιμή της μεταβολής της ορμής του Α σώματος, σημαίνει ότι το διάνυσμα έχει κατεύθυνση προς τα αριστερά.

dmargaris@gmail.com