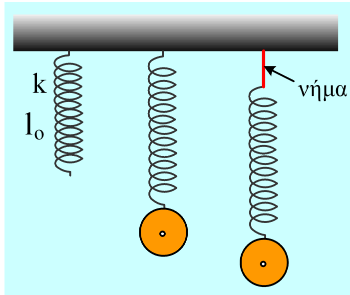
Η περίοδος και η ενέργεια σε μια αατ



Το ιδανικό ελατήριο του σχήματος κρέμεται από το ταβάνι, ενώ στο κάτω άκρο του ηρεμεί ένα σώμα μάζας m. Το ελατήριο έχει φυσικό μήκος l_o, ενώ παρουσιάζει επιμήκυνση $\Delta l=\frac{l_o}{4}$. Εκτρέπουμε κατακόρυφα το σώμα, προσφέροντάς του ενέργεια μέσω έργου:

$$W=\frac{2}{9}mgl_o$$

και το αφήνουμε να εκτελέσει αατ.

i) Η περίοδος ταλάντωσης του σώματος είναι ίση:

$$\alpha)\, T=2\pi\sqrt{\frac{l_o}{g}},\quad \beta)\, T=\pi\sqrt{\frac{l_o}{g}},\quad \gamma)\, T=\pi\sqrt{\frac{2l_o}{g}},\quad \delta)\, T=\pi\sqrt{\frac{l_o}{2g}}.$$

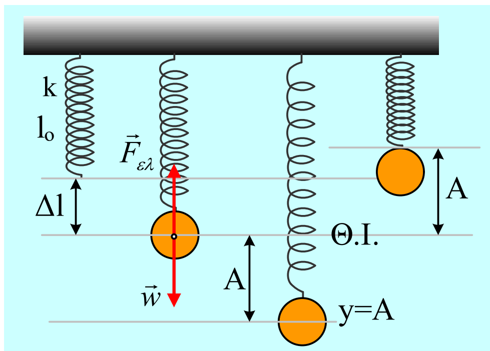
ii) Το ελάχιστο μήκος του ελατηρίου, στη διάρκεια της ταλάντωσης, είναι ίσο:

$$\alpha)\, l_{min}=\frac{8}{9}l_o,\quad \beta)\, l_{min}=\frac{9}{10}l_o,\quad \gamma)\, l_{min}=\frac{10}{11}l_o,\quad \delta)\, l_{min}=\frac{11}{12}l_o.$$

iii) Αν το πάνω άκρο του ελατηρίου συνδεόταν μέσω νήματος με το ταβάνι, όπως στο δεξιό παραπάνω σχήμα, τότε αν W_1 η μέγιστη ενέργεια που μπορούμε να μεταφέρουμε στο σώμα που αρχικά ηρεμεί, ώστε το νήμα να μην χαλαρώνει, στη διάρκεια της ταλάντωσης που θα ακολουθήσει, τότε:

$$a)\, \frac{W_1}{W}=\frac{9}{16},\quad \beta)\, \frac{W_1}{W}=\frac{9}{14},\quad \gamma)\, \frac{W_1}{W}=\frac{9}{12},\quad \delta)\, \frac{W_1}{W}=\frac{9}{10}.$$

Απάντηση:



Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί η θέση ισορροπίας, όπου το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά Δl, καθώς και οι δύο ακραίες θέσεις της ταλάντωσης. Η κάτω ακραία θέση, όπου το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά Δl+A και η άνω ακραία θέση, όπου το ελατήριο έχει συσπειρωθεί κατά A-Δl (υποθέτουμε ότι A>Δl).

Στη θέση ισορροπίας:

$$\Sigma\vec{F}=0 \rightarrow F_{ελ}=w \rightarrow k\Delta l=mg \rightarrow$$

$$k=\frac{mg}{\Delta l}=\frac{mg}{l_o/4}=\frac{4mg}{l_o}\quad (1)$$

i) Για την περίοδο ταλάντωσης έχουμε:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{m}{4mg/l_o}}=2\pi\sqrt{\frac{l_o}{4g}}=\pi\sqrt{\frac{l_o}{g}}$$

Σωστό το β).

ii) Όση ενέργεια προσφέραμε μέσω έργου, για την αρχική εκτροπή του σώματος, τόση είναι η ενέργεια ταλάντωσης:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{2}{9}mgl_o \rightarrow$$

$$A^2 = \frac{4}{9}\frac{mgl_o}{k} \xrightarrow{(1)} A^2 = \frac{4}{9}\frac{mgl_o}{4mg/l_o} \rightarrow A^2 = \frac{1}{9}l_o^2 \rightarrow$$

$$A = \frac{1}{3}l_o$$

Αλλά με βάση το σχήμα, το ελατήριο έχει το ελάχιστο μήκος του, όταν το σώμα φτάνει στην ακραία πάνω θέση του, οπότε το ελατήριο έχει συσπείρωση:

$$\Delta l_1 = A - \Delta l = \frac{1}{3}l_o - \frac{1}{4}l_o = \frac{1}{12}l_o$$

Οπότε στη θέση αυτή το ελατήριο έχει μήκος:

$$l_{min} = l_o - \Delta l_1 = l_o - \frac{1}{12}l_o = \frac{11}{12}l_o$$

Σωστό το δ)

iii) Για να μην χαλαρώνει το νήμα θα πρέπει η τάση του νήματος, η οποία είναι ίση με την δύναμη που το ελατήριο ασκεί στο νήμα, να είναι μεγαλύτερη ή τουλάχιστον ίση με το μηδέν. Αλλά αυτό σημαίνει ότι το ελατήριο θα πρέπει σε όλη τη διάρκεια της ταλάντωσης να ισχύει για την επιμήκυνση του ελατηρίου $\Delta l \geq 0$. Αλλά τότε το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης είναι $A_1 = \Delta l$ και η αντίστοιχη ενέργεια ταλάντωσης:

$$E_1 = \frac{1}{2}k\left(\Delta l\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{4mg}{l_o}\frac{l_o^2}{16} = \frac{1}{8}mgl_o = W_1$$

Έτσι για τον ζητούμενο λόγο έχουμε:

$$\frac{W_1}{W} = \frac{\frac{1}{8}mgl_o}{\frac{2}{9}mgl_o} = \frac{9}{16}$$

Σωστό το α)

dmargaris@gmail.com