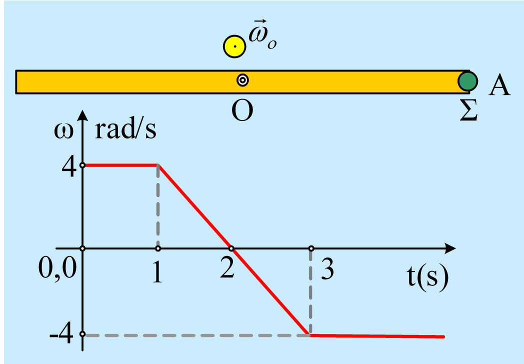
Η δοκός και το υλικό σημείο σε περιστροφή



Η δοκός του σχήματος, μήκους l=4m, περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα ο οποίος διέρχεται από το μέσον της Ο, διαγράφοντας οριζόντιο επίπεδο (το σχήμα σε κάτοψη). Στο ένα άκρο της δοκού έχει προσκολληθεί μια μικρή σφαίρα Σ μάζας 0,1kg, δημιουργώντας έτσι ένα στερεό s. Στο διάγραμμα δίνεται η γωνιακή ταχύτητα του στερεού σε συνάρτηση με το χρόνο, όπου η αρχική γωνιακή ταχύτητα έχει την κατεύθυνση που έχει σημειωθεί, ενώ η θέση της δοκού είναι αυτή του σχήματος με τη σφαίρα στη θέση Α.

i) Τη στιγμή t_1=0,5s να υπολογιστούν η γωνιακή επιτάχυνση του στερεού s, η στροφορμή και ο ρυθμός μεταβολής τη στροφορμής της σφαίρας Σ, την οποία θεωρούμε υλικό σημείο, ως προς τον άξονα περιστροφής στο Ο.

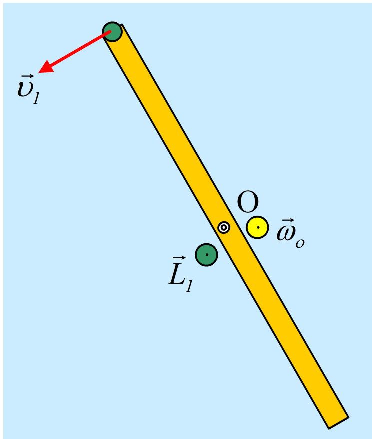
ii) Αφού υπολογιστεί η γωνία που έχει περιστραφεί το στερεό μέχρι τη στιγμή t_2=2s να υπολογιστούν για τη στιγμή t_2:

α) Η επιτάχυνση της σφαίρας και η δύναμη που δέχεται από τη δοκό.

β) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας ως προς τον άξονα περιστροφής.

iii) Ποια χρονική στιγμή t_3 η σφαίρα βρίσκεται ξανά στην θέση Α, για πρώτη φορά; Να υπολογιστεί η μεταβολή της στροφορμής της σφαίρας από 0-t_3.

Απάντηση:

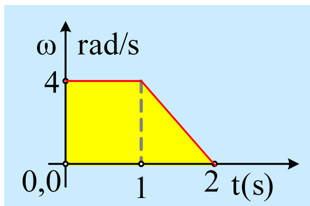


i) Στο χρονικό διάστημα 0-1s το στερεό μας στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα. Κατά συνέπεια δεν έχει γωνιακή επιτάχυνση! Όσον αφορά τη σφαίρα Σ, αυτή έχει στροφορμή πάνω στον άξονα με φορά προς τον αναγνώστη, όπως στο σχήμα, με μέτρο:

$$L_1 = m\upsilon_1 R = m\cdot\omega R\cdot R = m\cdot\omega\cdot R^2 \xrightarrow{R=\frac{l}{2}=2m}$$

$$L_1 = 0{,}1\cdot 4\cdot 2^2\,kgm^2/s = 1{,}6\,kgm^2/s$$

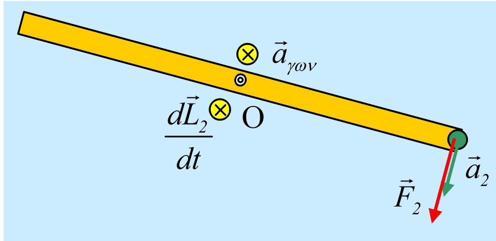
Αλλά αν η γωνιακή ταχύτητα παραμένει σταθερή, τότε και η στροφορμή δεν μεταβάλλεται την στιγμή t_1 και $d\vec{L}_1/dt = 0$.



ii) Το εμβαδόν του τραπεζίου (με κίτρινο χρώμα), στο διπλανό διάγραμμα ω-t, είναι αριθμητικά ίσο με την γωνία περιστροφής του στερεού s, μέχρι τη στιγμή t_2=2s.

$$\theta_2 = \frac{B+\beta}{2}\upsilon = \frac{2+1}{2}4rad = 6rad$$

α) Τη στιγμή t_2=2s η γωνιακή ταχύτητα είναι μηδενική, άρα και η ταχύτητα της σφαίρας, αλλά όχι και η γωνιακή επιτάχυνση του στερεού. Αυτή είναι σταθερή στο διάστημα 1s-3s με αλγεβρική τιμή:



$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{-4-4}{2} rad/s^2 = -4\, rad/s^2$$

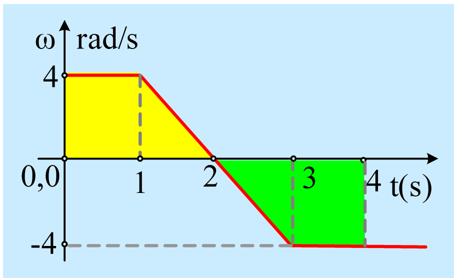
Η αρνητική τιμή μας λέει ότι το διάνυσμα της γωνιακής επιτάχυνσης, η οποία έχει την διεύθυνση του άξονα, έχει φορά αντίθετη της αρχικής γωνιακής ταχύτητας, η οποία ήταν θετική, συνεπώς έχει φορά προς τα μέσα, όπως στο σχήμα, τείνοντας να περιστρέψει την δοκό δεξιόστροφα, όπως οι δείκτες το ρολογιού. Αλλά τότε η επιτάχυνση της σφαίρας, καθώς και η δύναμη F_2 από τη δοκό, θα είναι διανύσματα κάθετα στην δοκό, όπως στο σχήμα, με μέτρα:

$$\alpha_2 = |\alpha_{\gamma\omega\nu}| R = 4\cdot 2\, m/s^2 = 8\, m/s^2 \quad \text{και}$$
$$\Sigma F = F_2 = m a_2 = 0{,}1\cdot 8N = 0{,}8N$$

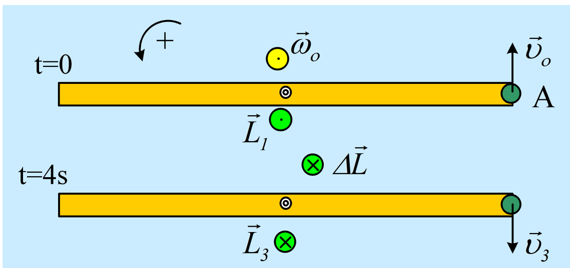
β) Και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας είναι διάνυσμα πάνω στο άξονα με φορά ίδια με την γωνιακή επιτάχυνση, όπως στο σχήμα, με μέτρο:

$$\frac{dL_2}{dt} = |\Sigma\tau| = |\tau_F| = F_2 R = 0{,}8\cdot 2\, kgm^2/s^2 = 1{,}6\, kgm^2/s^2.$$

iii) Την στιγμή t_2 η δοκός (αλλά και το στερεό μας...) σταμάτησε να στρέφεται αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού, έχοντας στραφεί κατά γωνία 6rad < 2π rad, πράγμα που σημαίνει ότι δεν έχει ολοκληρώσει μια πλήρη στροφή. Στη συνέχεια στρέφεται ωρολογιακά, οπότε στην αρχική θέση θα φτάσει για πρώτη φορά, όταν διαγράψει γωνία ξανά 6rad με αντίθετη φορά. Αλλά τότε από την ισότητα των δύο εμβαδών στο διπλανό διάγραμμα, συμπεραίνουμε ότι αυτό θα συμβεί τη χρονική στιγμή t_3=4s, οπότε τα δυο τραπέζια (κίτρινο και πράσινο) είναι ίσα.



Στη θέση αυτή το στερεό μας έχει γωνιακή ταχύτητα ω=-4rad/s και η σφαίρα μας ταχύτητα $υ_3$ όπως στο σχήμα, οπότε έχει και στροφορμή με φορά προς τα μέσα, αντίθετη της αρχικής στροφορμής. Έτσι για την μεταβολή της στροφορμής της σφαίρας, θεωρώντας θετική την αρχική γωνιακή ταχύτητα, έχουμε:



$$\Delta\vec{L} = \vec{L}_3 - \vec{L}_1 \to \Delta L = -m|\upsilon_3|R - m|\upsilon_1|R = -m|\omega_3|R^2 - m|\omega_o|R^2 \to$$
$$\Delta L = -2m\omega R^2 = -2\cdot 0{,}1\cdot 4\cdot 2^2\, kgm^2/s = -3{,}2 kgm^2/s$$

με διεύθυνση του άξονα περιστροφής και φορά προς τα μέσα, όπως στο σχήμα.

dmargaris23@gmail.com