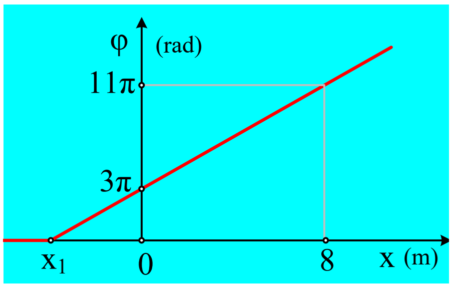
Ένα άλλο διάγραμμα φάσης

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου, διαδίδεται ένα εγκάρσιο αρμονικό πλάτους A=0,3m και στο σχήμα δίνεται το διάγραμμα της φάσης της απομάκρυνσης των διαφόρων σημείων του μέσου, σε συνάρτηση με την θέση x ($\varphi=f(x)$) τη χρονική στιγμή t_1.



i) Το κύμα διαδίδεται προς τα δεξιά (θετική φορά του άξονα) ή προς τα αριστερά;

ii) Να υπολογίσετε το μήκος του κύματος καθώς και την θέση x_1, όπου φτάνει το κύμα τη στιγμή t_1.

iii) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της φάσης ($\varphi=f(x)$) της απομάκρυνσης, την χρονική στιγμή $t_2=t_1+2T$, όπου T η περίοδος ταλάντωσης των σημείων του μέσου.

iv) Αν η περίοδος ταλάντωσης των σημείων του μέσου είναι T=1s, ενώ t_1=2s:

α) Να βρεθεί η θέση που φτάνει το κύμα τη στιγμή t=0.

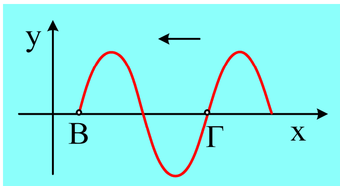
β) Να βρεθεί η εξίσωση του κύματος.

γ) Να σχεδιάσετε ένα στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t_3=1s.

Απάντηση:

i) Με βάση το διάγραμμα, βλέπουμε ότι καθώς κινούμαστε προς τα αριστερά, η φάση της απομάκρυνσης μειώνεται. Αυτό σημαίνει ότι μειώνεται ο χρόνος ταλάντωσης, κάθε σημείου του μέσου, πράγμα που μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το κύμα διαδίδεται προς τα αριστερά.

ii) Ας δούμε το διπλανό στιγμιότυπο ενός κύματος, το οποίο έχει φτάσει στο σημείο Β. Προφανώς η φάση της απομάκρυνσης του Β είναι μηδενική. Το σημείο Γ, το οποίο απέχει από το Β κατά λ, έχει εκτελέσει μια ταλάντωση και η φάση της απομάκρυνσής του θα είναι ίση με 2π. Αλλά τότε στην περίπτωσή μας η φάση μειώνεται από 11π σε 3π, όταν μετακινηθούμε από το σημείο Σ στην θέση x_Σ=8m στην θέση x=0, πράγμα που σημαίνει ότι η απόσταση των 8m αντιστοιχεί σε τέσσερα μήκη κύματος, οπότε λ=2m.



Ας το δούμε και με εξισώσεις. Για την φάση θα έχουμε:

$$\varphi=2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}+\frac{\theta}{2\pi}\right)\xrightarrow{t_1}\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=2\pi\left(\frac{t_1}{T}+\frac{x_o}{\lambda}+\frac{\theta}{2\pi}\right)-2\pi\left(\frac{t_1}{T}+\frac{x_\Sigma}{\lambda}+\frac{\theta}{2\pi}\right)\rightarrow$$

$$\Delta\varphi=2\pi\frac{x_0-x_\Sigma}{\lambda}\quad(1)\rightarrow$$

$$\lambda=2\pi\frac{x_0-x_\Sigma}{\Delta\varphi}=2\pi\frac{0-8}{-8\pi}=2m$$

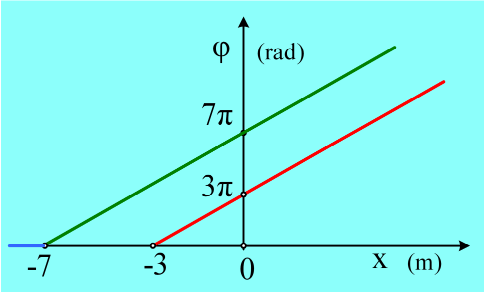
Εξάλλου εφαρμόζοντας την σχέση (1) για τις θέσει x=0 και x_1 παίρνουμε:

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{x_1 - x_0}{\lambda} \to 0 - 3\pi = 2\pi\frac{x_1 - 0}{2} \to x_1 = -3m$$

iii) Η συνάρτηση της φάσης ως προς το x, (για ορισμένη χρονική στιγμή) είναι συνάρτηση πρώτου βαθμού:

$$\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}+\frac{\theta}{2\pi}\right) \xrightarrow{t_1} \varphi = 2\pi\frac{t_1}{T}+\frac{2\pi}{\lambda}x+\theta \ (2)$$

Βλέπουμε από την παραπάνω σχέση, ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (2π/λ) παραμένει σταθερός, οπότε και μια άλλη στιγμή η ευθεία θα έχει την ίδια κλίση με την κλίση την στιγμή t_1. Έτσι την χρονική στιγμή $t_2=t_1+2T$, το κύμα θα έχει διαδοθεί κατά d=2λ=4m, φτάνοντας στην θέση x_2=-7m, ενώ η φάση όλων των σημείων θα έχει αυξηθεί κατά 4π rad. Με βάση αυτά παίρνουμε την πράσινη γραμμή στο διπλανό διάγραμμα.



iv) Αν η περίοδος είναι T=2s, τότε το κύμα διαδίδεται με ταχύτητα:

$$\upsilon = \frac{\lambda}{T} = \frac{2m}{1s} = 2\,m/s$$

α) Σε χρόνο t_1 το κύμα έχει διαδοθεί κατά $d=\upsilon \cdot t_1=2\cdot 2m=4m$, συνεπώς τη στιγμή t=0 το κύμα έχει φτάσει σε ένα σημείο Β , όπως στο σχήμα, όπου $x_B-(-3m)=d$ ή $x_B=1m$.

β) Από την εξίσωση (2) παίρνουμε για την φάση του σημείου στη θέση x=0, τη στιγμή t_1:

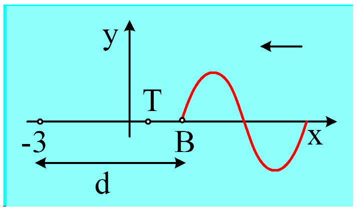
$$\varphi = 2\pi\frac{t_1}{T}+\frac{2\pi}{\lambda}x+\theta \xrightarrow{t_1=1,5s,x=0} 3\pi = 2\pi\frac{2}{1}+\theta \to \theta = -\pi \ (rad)$$

Αλλά τότε η εξίσωση του κύματος παίρνει τη μορφή:

$$y = A\eta\mu\left(2\pi\frac{t_1}{T}+\frac{2\pi}{\lambda}x+\theta\right) = 0,3\eta\mu 2\pi\left(t+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right) \ (S.I.)$$

Εναλλακτικά:

Αφού το κύμα τη στιγμή t=0 φτάνει στο σημείο Β στη θέση x_B=1m, σε ένα τυχαίο σημείο Τ στη θέση x<1m το κύμα θα καθυστερήσει κατά Δt=(1-x)/υ, οπότε η εξίσωση της απομάκρυνσης θα ικανοποιεί την εξίσωση:



$$y = A\eta\mu\omega(t-\Delta t) = 0,3\eta\mu\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{1-x}{2}\right) \to$$

$$y = 0,3\eta\mu 2\pi\left(t+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right) \ (S.I.)$$

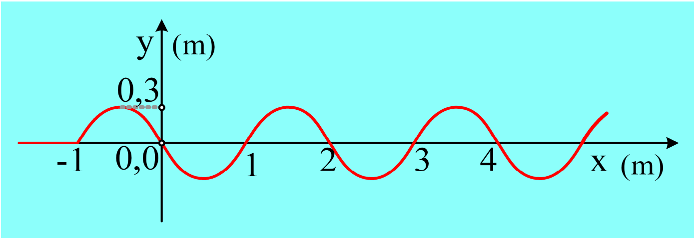
v) Το κύμα τη στιγμή t_3=1s ,έχει διαδοθεί μέχρι μια θέση αριστερότερα του σημείου Β, σε απόσταση $d_3=\upsilon t_2$=2m, φτάνοντας έτσι στη θέση x_3=-1m.

Εξάλλου με αντικατάσταση στην εξίσωση του κύματος παίρνουμε:

$$y = 0,3\eta\mu 2\pi\left(t + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) \xrightarrow{t=1s} y = 0,3\eta\mu 2\pi\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) \rightarrow$$

$$y = 0,3\eta\mu\left(2\pi + \pi x - \pi\right) = -0,3\eta\mu\left(\pi x\right) \quad x \geq -1m \quad (3)$$

Η γραφική παράσταση της σχέσης (3) είναι:



dmargaris@gmail.com