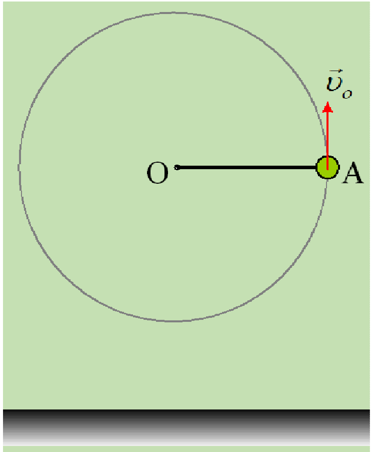
Δουλεύοντας με την ορμή και την στροφορμή μιας σφαίρας



Μια μικρή σφαίρα μάζας 0,5kg, η οποία θεωρείται υλικό σημείο, είναι δεμένη στο άκρο μη ελαστικού νήματος, διαγράφοντας κατακόρυφο κύκλο, κέντρου Ο και ακτίνας R=0,75m. Σε μια στιγμή $t_o=0$ η σφαίρα περνά από το σημείο Α, με το νήμα οριζόντιο, έχοντας ταχύτητα $\upsilon_o=5m/s$. Θεωρούμε θετική την γωνιακή ταχύτητα περιφοράς της σφαίρας και $g=10m/s^2$.

i) Να υπολογιστεί η γωνιακή ταχύτητα και η γωνιακή επιτάχυνση της σφαίρας στη θέση Α.

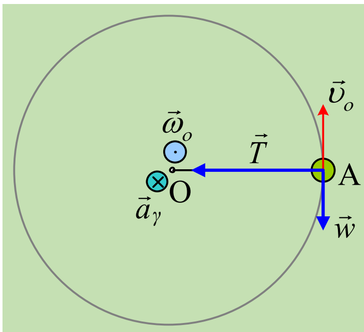
ii) Σε μια επόμενη στιγμή t_1 ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας ως προς το κέντρο Ο της τροχιάς είναι ίσος με $dL/dt=-3kg\cdot m/s^2$, για πρώτη φορά. Για την στιγμή αυτή να υπολογιστούν:

α) Η στροφορμή της σφαίρας ως προς το Ο.

β) Η ορμή και ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της ορμής του σώματος.

iii) Τη στιγμή t_2 που ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας είναι μηδενικός για 2η φορά, το νήμα κόβεται, με αποτέλεσμα η σφαίρα να φτάνει στο έδαφος με κινητική ενέργεια K=26J, όπου και ανακλάται ελαστικά. Να υπολογιστεί η μεταβολή της ορμής της σφαίρας που οφείλεται στην κρούση με το έδαφος.

Απάντηση:



i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα τη στιγμή t_o. Στη θέση αυτή έχει γωνιακή ταχύτητα, κάθετη στο επίπεδο της τροχιάς, στο κέντρο Ο της τροχιάς, μέτρου ω_o, όπου:

$$\omega_o = \frac{\upsilon_o}{R} = \frac{5}{0,75} rad/s = \frac{20}{3} rad/s$$

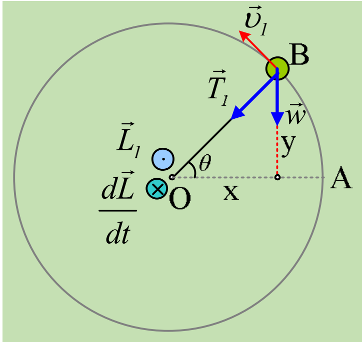
Τώρα όσον αφορά τις δυνάμεις, η τάση του νήματος παίζει τον ρόλο της κεντρομόλου, αλλάζοντας την κατεύθυνση της ταχύτητας, ενώ το βάρος, έχει την διεύθυνση της ταχύτητα και μεταβάλλει το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας. Αλλά για τα **μέτρα** ταχύτητας και γωνιακής ταχύτητας ισχύει $\upsilon_o=\omega R$, οπότε:

$$\upsilon_o = \omega_o R \to \frac{d\upsilon_o}{dt} = \frac{d\omega_o}{dt} R \to \alpha_{\varepsilon\pi} = \alpha_\gamma R \to \alpha_\gamma = \frac{\alpha_{\varepsilon\pi}}{R} = \frac{w/m}{R} \to$$

$$\alpha_\gamma = \frac{g}{R} = \frac{10}{0,75} rad/s^2 = \frac{40}{3} rad/s^2$$

όπου η παραπάνω γωνιακή επιτάχυνση είναι επίσης κάθετη στο επίπεδο της κυκλικής τροχιάς, στο κέντρο Ο, με φορά προς τα μέσα, οπότε (παραπάνω υπολογίσαμε το μέτρο της α_γ) $\alpha_\gamma = -40/3\ rad/s^2$.

ii) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας ως προς το Ο, είναι ίσος με την ροπή του βάρους ως προς το Ο, αφού η ροπή της τάσης είναι μηδενική. Αλλά για να είναι ο παραπάνω ρυθμός αρνητικός, θα πρέπει και η ροπή να είναι αρνητική, πράγμα που συμβαίνει αν τη στιγμή t_1 η σφαίρα δεν έχει φτάσει ακόμη στο μέγιστο ύψος της τροχιάς, ευρισκόμενη σε μια θέση Β, όπως στο διπλανό σχήμα. Τότε για το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής θα έχουμε:



$$\frac{dL}{dt} = -wx = -mg \cdot x \to x = -\frac{dL/dt}{mg} = -\frac{-3}{0,5 \cdot 10} m = 0,6m \to$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{x}{R} = \frac{0,6}{3/4} = 0,8 \to \eta\mu\theta = 0,6 \to y = R\eta\mu\theta = \frac{3}{4} \cdot 0,6m = 0,45m$$

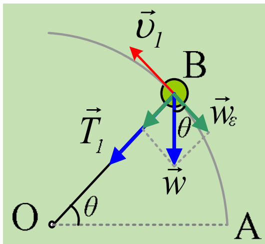
Εφαρμόζουμε τώρα την Α.Δ.Μ.Ε. μεταξύ των θέσεων Α και Β, θεωρώντας ότι U_A=0, παίρνουμε:

$$K_A + U_A = K_B + U_B \to \frac{1}{2}m\upsilon_o^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + mgy \to$$
$$\upsilon_1 = \sqrt{\upsilon_o^2 - 2gy} = \sqrt{5^2 - 2 \cdot 10 \cdot 0,45}m/s = 4m/s$$

α) Η στροφορμή της σφαίρας, ως προς το κέντρο Ο τη στιγμή t_1 είναι κάθετη στο επίπεδο, στο Ο, όπως στο σχήμα και μέτρο:

$$L_1 = m\upsilon_1 R = 0,5 \cdot 4 \cdot 0,75 kg \cdot m^2/s = 1,5 kg \cdot m^2/s$$

β) Η ορμή της σφαίρας έχει την κατεύθυνση της ταχύτητας, κάθετη στην ακτίνα, με μέτρο:

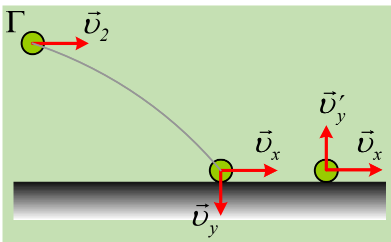


$$p_1 = m\upsilon_1 = 0,5 \cdot 4 kg\, ^m/_s = 2kg\, ^m/_s$$

Ενώ το μέτρο της ορμής μεταβάλλεται εξαιτίας της εφαπτομενικής συνιστώσας w_ε του βάρους, οπότε από τον γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα, παίρνουμε:

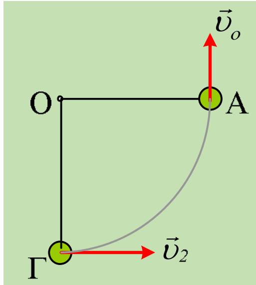
$$\frac{d|p_1|}{dt} = |w_\varepsilon| = mg \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = 0,5 \cdot 10 \cdot 0,8 kgm/s^2 = 4kgm/s^2.$$

iii) Τη στιγμή t_2 η σφαίρα βρίσκεται στο κατώτερο σημείο της κυκλικής τροχιάς (η πρώτη φορά που η ροπή του βάρους είναι μηδενική είναι στο ανώτερο σημείο της τροχιάς). όπου φτάνει με οριζόντια ταχύτητα υ_2. Ακολουθεί οριζόντια βολή, με σταθερή οριζόντια συνιστώσα ταχύτητας υ_x, ενώ φτάνει στο έδαφος με κατακόρυφη συνιστώσα ταχύτητας υ_y. Κατά την ελαστική κρούση, δεν θα μεταβληθεί η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας, ενώ η κατακόρυφη συνιστώσα θα αντιστραφεί, με το ίδιο μέτρο. Έτσι για την κινητική ενέργεια, ελάχιστα πριν την κρούση της σφαίρας με το έδαφος, θα έχουμε:



$$K_\pi = \frac{1}{2} m \upsilon_\pi^2 = \frac{1}{2} m\left(\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2\right) = \frac{1}{2} m \upsilon_x^2 + \frac{1}{2} m \upsilon_y^2 \quad (1)$$

Αλλά εφαρμόζοντας την Α.Δ.Μ.Ε. μεταξύ των θέσεων Α και Γ, θεωρώντας $U_\Gamma=0$, έχουμε:



$$K_A + U_A = K_\Gamma + U_\Gamma \rightarrow \frac{1}{2} m \upsilon_o^2 + mgR = \frac{1}{2} m \upsilon_2^2 + 0 \rightarrow$$

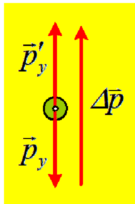
$$\frac{1}{2} m \upsilon_2^2 = \frac{1}{2} m \upsilon_o^2 + mgR = \frac{1}{2} 0{,}5 \cdot 5^2 J + 0{,}5 \cdot 10 \cdot 0{,}75 J = 10J$$

Οπότε από την σχέση (1) παίρνουμε:

$$\frac{1}{2} m \upsilon_y^2 = K_\pi - \frac{1}{2} m \upsilon_2^2 = 26J - 10J = 16J \rightarrow$$

$$\upsilon_y = \sqrt{\frac{2 \cdot 16}{0{,}5}} m/s = 8m/s$$

Αλλά τότε θεωρώντας την προς τα πάνω κατεύθυνση ως θετική, έχουμε για την μεταβολή της ορμής της σφαίρας κατά τη διάρκεια της κρούσης:



$$\Delta \vec{p} = \vec{p}'_y - \vec{p}_y \rightarrow \Delta p = m(\upsilon'_y - \upsilon_y) \rightarrow$$

$$\Delta p = 0{,}5\left(8 - (-8)\right) kgm/s = 8kgm/s$$

dmargaris@gmail.com