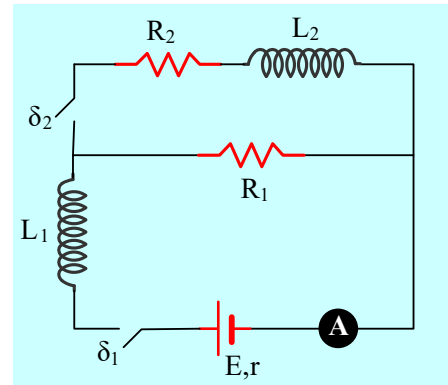


## Ένας - ένας οι διακόπτες κλείνουν

Στο κύκλωμα του διπλανού σχήματος οι διακόπτες είναι ανοικτοί, η πηγή έχει ΗΕΔ  $E=36V$  και εσωτερική αντίσταση  $r=1\Omega$ . Οι δυο αντιστάτες έχουν αντίσταση  $R_1=15\Omega$  και  $R_2=7,5\Omega$ , ενώ τα δύο ιδανικά πηνία έχουν συντελεστές αυτεπαγωγής  $L_1=0,5H$  και  $L_2=0,6H$ .

Σε μια στιγμή  $t_0=0$  κλείνουμε το διακόπτη  $\delta_1$ .

- i) Ποια η ένδειξη του ιδανικού αμπερομέτρου και ποιος ο ρυθμός μεταβολής της έντασης του ρεύματος που το διαρρέει, αμέσως μετά το κλείσιμο του διακόπτη;



Σε μια στιγμή  $t_1$ , όπου η ένδειξη του αμπερομέτρου είναι  $i_1=1,2A$ , κλείνουμε και το διακόπτη  $\delta_2$ .

- ii) Ελάχιστα πριν τη στιγμή  $t_1$  να υπολογισθούν:

- α) Η ΗΕΔ λόγω αυτεπαγωγής στο πηνίο  $L_1$ , καθώς και ο ρυθμός της έντασης του ρεύματος που το διαρρέει.  
β) Η ισχύς της πηγής. Τι ποσοστό της παραπάνω ισχύος αποθηκεύεται στο πηνίο με τη μορφή της ενέργειας του μαγνητικού του πεδίου;

- iii) Ελάχιστα μετά τη στιγμή  $t_1$  και το κλείσιμο του διακόπτη  $\delta_2$ , να βρεθούν:

- α) Η ένδειξη του αμπερομέτρου  
β) Η ΗΕΔ από αυτεπαγωγή στο πηνίο  $L_2$ .

- iv) Πόση τελικά ενέργεια μαγνητικού πεδίου αποθηκεύεται σε κάθε πηνίο;

## Απάντηση:

Κλείνοντας το διακόπτη  $\delta_1$  και μέχρι τη στιγμή  $t_1$  το κύκλωμά μας είναι αυτό του διπλανού σχήματος, το οποίο διαρρέεται από ρεύμα μεταβλητής έντασης  $i$ .

- i) Με το κλείσιμο του διακόπτη  $\delta_1$ , το κύκλωμα θα αρχίσει να διαρρέεται από ρεύμα η ένταση του οποίου ξεκινά από την τιμή  $i=0$  και αυξάνεται, μέχρι τελική, μέγιστη τιμή,  $I=E/R_{ολ}$ . Έτσι η αρχική ένδειξη του αμπερομέτρου είναι μηδενική, ενώ από τον 2ο κανόνα του Kirchhoff παίρνουμε:

$$E - ir - L \frac{di}{dt} - iR = 0 \xrightarrow{i=0} E = L \frac{di}{dt} \rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{E}{L} = \frac{36}{0,5} A/s = 72 A/s$$

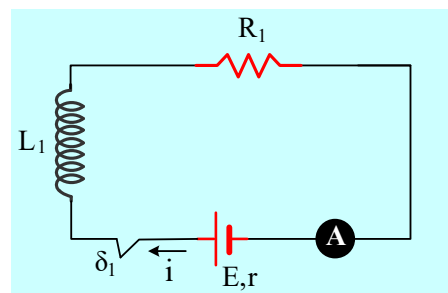
- ii) Ελάχιστα πριν το άνοιγμα του διακόπτη, όπου το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα έντασης  $i_1$ , θα έχουμε:

- α) Εφαρμόζουμε ξανά το 2ο κανόνα του Kirchhoff γράφοντας:

$$E - i_1 r + E_{avt} - i_1 R = 0 \rightarrow E_{avt} = -E + i_1 (R_1 + r) \rightarrow$$

$$E_{avt} = -36V + 1,2 \cdot (15 + 1)V = -16,8V$$

Όμως για την παραπάνω ΗΕΔ από αυτεπαγωγή ισχύει:



$$E_{av\tau} = -L \frac{di}{dt} \rightarrow \left( \frac{di}{dt} \right)_{t_1} = -\frac{E_{av\tau}}{L} = -\frac{-16,8}{0,5} A/s = 33,6 A/s$$

β) Η πηγή E, τη στιγμή  $t_1$ , παρέχει ενέργεια στο κύκλωμα με ρυθμό, ίσο με την ισχύ της:

$$P_E = E \cdot i = E \cdot i_1 = 36 \cdot 1,2W = 43,2W$$

Ένα μέρος της παραπάνω ισχύος αποθηκεύεται στο μαγνητικό πεδίο του πηνίου, αφού αντιμετωπίζοντας το πηνίο ως μια πηγή με ΗΕΔ  $E_{av\tau}$ , θα έχουμε:

$$P_{L_1} = E_{av\tau} \cdot i_1 = -16,8 \cdot 1,2W = -20,16W$$

Η αρνητική τιμή της παραπάνω ισχύος σημαίνει ότι, το πηνίο δεν παρέχει ενέργεια στο ηλεκτρικό ρεύμα, αλλά παίρνει ενέργεια από αυτό, μετατρέποντάς την σε ενέργεια μαγνητικού πεδίου.

Συνεπώς θα ισχύει ότι:

$$\frac{dW_L}{dt} = +20,16 J/s$$

Αλλά τότε το ζητούμενο ποσοστό είναι ίσο:

$$\pi = \frac{dW_L/dt}{P_E} \cdot 100\% = \frac{20,16}{43,2} \cdot 100\% = 46,7\%$$

iii) Με κλειστούς και τους δυο διακόπτες, θα έχουμε το διπλό κύκλωμα.

α) Με το κλείσιμο του διακόπτη  $\delta_2$  το πηνίο  $L_2$  θα αρχίσει να διαρρέεται από ρεύμα ξεκινώντας από μηδενική ένταση, η οποία θα αυξάνεται. Αλλά τότε τη στιγμή  $t_1^+$  το μόνο ρεύμα είναι αυτό που διαρρέει το αμπερόμετρο και πριν το κλείσιμο του διακόπτη, συνεπώς η ένδειξή του είναι ξανά  $i_A = i_1 = 1,2A$ .

β) Αν η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον κλάδο που περιέχει το πηνίο  $L_2$  είναι μηδενική, τότε η τάση  $V_{AB}$  στα άκρα της αντίστασης  $R_1$  θα είναι ίση με με την τάση στα άκρα του πηνίου με αυτεπαγωγή  $L_2$ .

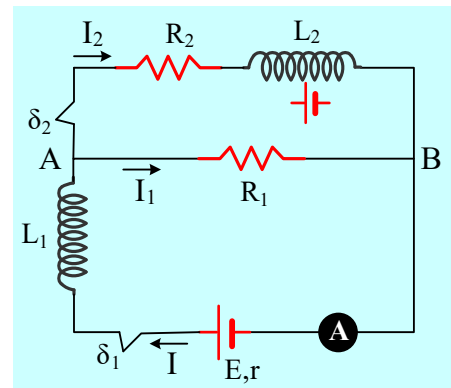
$$V_{\pi 1} = V_{R1} = i_1 \cdot R_1 = 1,2 \cdot 15V = 18V$$

Και η ΗΕΔ από αυτεπαγωγή, πόση είναι; Είναι ίση με 18V ή ίση με -18V; Αξίζει να προσέξουμε ότι η πολικότητα της ΗΕΔ, είναι αυτή που έχει σημειωθεί στο σχήμα, με θετικό το άκρο που συνδέεται με το σημείο A. Αλλά τότε αυτή η ΗΕΔ έχει αντίθετη πολικότητα από την πηγή E. Έτσι αν θεωρούμε ότι  $E > 0$  και  $i > 0$ , τότε αυτή η ΗΕΔ θα πρέπει να θεωρηθεί αρνητική, συνεπώς  $E_{av\tau,2} = -18V$ .

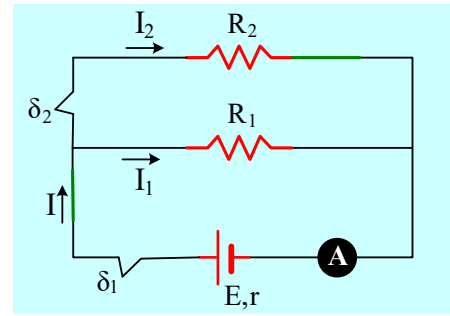
Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε το 2ο κανόνα του Kirchhoff περιμετρικά στο κύκλωμα:

$$E - ir + E_{av\tau,1} - I_2 R_2 + E_{av\tau,2} = 0 \xrightarrow{I_2=0}$$

$$E_{av\tau,2} = -L_2 \frac{dI_2}{dt} = -E + ir - E_{av\tau,1} = -36V + 1,2 \cdot 15V - (-16,8)V = -18V$$



iv) Μόλις σταθεροποιηθεί η ένταση του ρεύματος που διαρρέει κάθε πηνίο, έστω  $I$ ,  $I_1$  και  $I_2$  οι σταθερές εντάσεις των ρευμάτων που διαρρέουν τους κλάδους του κυκλώματος, όπως έχουν σημειωθεί στο παραπάνω κύκλωμα. Τότε η τάση στα άκρα κάθε πηνίου μηδενίζεται και μπορούμε να αντιμετωπίσουμε το κύκλωμα, με το ισοδύναμο, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αλλά τότε οι δύο αντιστάτες συνδέονται παράλληλα, με ισοδύναμη αντίσταση:



$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{7,5 \cdot 15}{7,5 + 15} \Omega = 5 \Omega$$

Αλλά τότε από το νόμο του Ohm στο κλειστό κύκλωμα παίρνουμε:

$$I = \frac{E}{R_{12} + r} = \frac{36V}{(5 + 1)\Omega} = 6 \text{ A} \rightarrow$$

$$V_{12} = IR_{12} = 6 \cdot 5V = 30V \text{ οπότε:}$$

$$I_1 = \frac{V_{12}}{R_1} = \frac{30V}{15\Omega} = 2 \text{ A} \quad \text{και} \quad I_2 = \frac{V_{12}}{R_2} = \frac{30V}{7,5\Omega} = 4 \text{ A}$$

Συνεπώς για τις ενέργειες των μαγνητικών πεδίων των πηνίων έχουμε:

$$U_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 = \frac{1}{2} 0,5 \cdot 6^2 \text{ J} = 9 \text{ J} \text{ και}$$

$$U_2 = \frac{1}{2} L_2 I_2^2 = \frac{1}{2} 0,6 \cdot 4^2 \text{ J} = 4,8 \text{ J}$$

### Σχόλιο:

Θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε τους κανόνες του Kirchhoff για την απάντησή μας, στο τελευταίο ερώτημα:

$$I = I_1 + I_2 \quad (1)$$

$$E - Ir - L_1 \frac{dI}{dt} - I_1 R_1 = 0 \xrightarrow{L_1 \frac{dI}{dt} = 0} E - Ir - I_1 R_1 = 0 \quad (2)$$

$$-I_2 R_2 - L_2 \frac{dI_2}{dt} + I_1 R_1 = 0 \xrightarrow{L_2 \frac{dI_2}{dt} = 0} -I_2 R_2 + I_1 R_1 = 0 \quad (3)$$

Με επίλυση του συστήματος των εξισώσεων (1), (2) και (3) βρίσκουμε τις τρεις εντάσεις του ρεύματος.

[dmargaris@gmail.com](mailto:dmargaris@gmail.com)