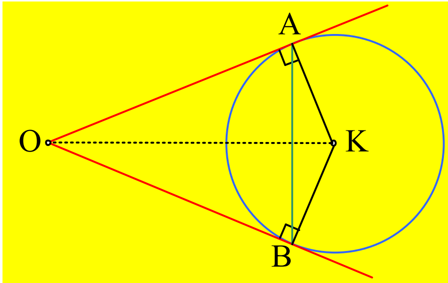
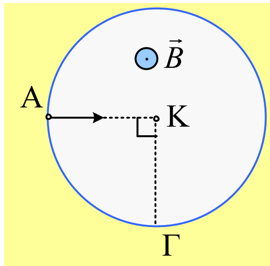
Ένα ιόν σε κυλινδρικό μαγνητικό πεδίο

Πρώτα λίγη Γεωμετρία…



Από ένα σημείο Ο φέρνουμε τις εφαπτόμενες σε ένα κύκλο κέντρου Κ, τις ΟΑ και ΟΒ. Προφανώς αυτές είναι κάθετες στις αντίστοιχες ακτίνες ΚΑ και ΚΒ. Από την ισότητα των δύο ορθογωνίων τριγώνων ΟΑΚ και ΟΒΚ, προκύπτει ότι (ΟΑ)=(ΟΒ), δηλαδή το σημείο Ο ισαπέχει από τα σημεία επαφής των δύο εφαπτομένων με τον κύκλο. Εξάλλου εύκολα προκύπτει ότι η ΟΚ, διχοτόμος της γωνίας ΑΟΒ είναι και μεσοκάθετος της χορδής ΑΒ.

Και η άσκηση:



Στο σχήμα βλέπουμε την τομή ενός κυλινδρικού ομογενούς μαγνητικού πεδίου έντασης Β=0,5Τ, σχήματος κύκλου, κέντρου Κ και ακτίνας α=0,1m. Ένα μονοσθενές ιόν εισέρχεται στο πεδίον στο σημείο Α με ταχύτητα που κατευθύνεται στο κέντρο Κ του κύκλου και εξέρχεται από το σημείο Γ όπου οι ακτίνες ΚΑ και ΚΓ είναι κάθετες μεταξύ τους.

i) Το ιόν φέρει θετικό ή αρνητικό φορτίο; Να βρεθεί η ορμή και η μεταβολή της ορμής του ιόντος κατά το πέρασμα του από το πεδίο.

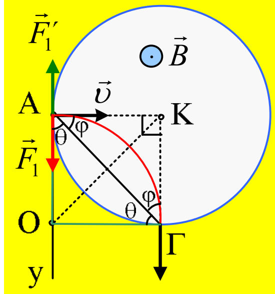
ii) Αν η ορμή του ιόντος τη στιγμή της εισόδου του στο σημείο Α είχε μέτρο $P_2 = P_1\sqrt{3}$, να υπολογιστεί η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς που θα διαγράψει τώρα το ιόν μέσα στο πεδίο.

α) Να προσδιοριστεί το σημείο εξόδου του ιόντος από το πεδίο.

β) Αν την πρώτη φορά το ιόν κινήθηκε μέσα στο πεδίο για χρονικό διάστημα t_1=0,6ms, πόσο χρόνο θα κινηθεί μέσα στο πεδίο, την δεύτερη φορά;

Δίνεται $e=-1{,}6\cdot 10^{-19}$C.

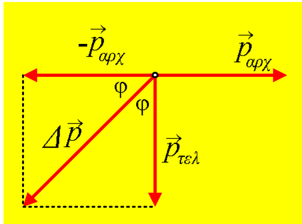
Απάντηση:



i) Μόλις το ιόν μπει στο μαγνητικό πεδίο, θα δεχτεί δύναμη Lorentz, κάθετη στην ταχύτητα όπως η δύναμη F_1, αν το ιόν φέρει θετικό φορτίο ή όπως η F_1' αν φέρει αρνητικό φορτίο. Αφού όμως μας δίνεται ότι εκτρέπεται προς τα κάτω (στο σχήμα) και εξέρχεται από το σημείο Γ, το ιόν φέρει θετικό φορτίο q=|e|. Αλλά τότε η δύναμη F_1 του σχήματος κατευθύνεται προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει το ιόν μέσα στο μαγνητικό πεδίο. Οπότε το κέντρο της κυκλικής τροχιάς είναι κάποιο σημείο πάνω στην ημιευθεία Αy. Με δεδομένο όμως ότι σημείο του κύκλου θα είναι και το σημείο Γ, το κέντρο της τροχιάς θα βρίσκεται πάνω στην μεσοκάθετο της αντίστοιχης χορδής ΑΓ. Το τρίγωνο ΚΑΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές οπότε φ=45°.

Αλλά και το τρίγωνο ΟΑΓ είναι ισοσκελές αφού (ΑΟ)=(ΟΓ)=R, οπότε $O\hat{A}\Gamma = O\hat{\Gamma}A = \theta$. Όμως η ΟΑ είναι κάθετη στην ΑΚ, συνεπώς φ+θ=90°. Πράγμα που σημαίνει ότι και η ΟΓ είναι κάθετη στην ακτίνα ΚΓ! Με άλλα λόγια η ταχύτητα εξόδου του ιόντος από το μαγνητικό πεδίο έχει την διεύθυνση της ακτίνας ΚΓ και η ΟΓ είναι επίσης εφαπτόμενη του κύκλου κέντρου Κ. Όσον αφορά την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς του ιόντος, είναι πια φανερό ότι το τετράπλευρο ΑΚΓΟ είναι τετράγωνο και R_1=α=0,1m.
Αλλά για την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει ισχύει:

$$R_1 = \frac{m\upsilon_1}{Bq} = \frac{p_1}{Bq} \rightarrow p_1 = B|e|R_1 = 0,5\cdot 1,6\cdot 10^{-19}\cdot 0,1 kgm/s = 8\times 10^{-21} kgm/s$$



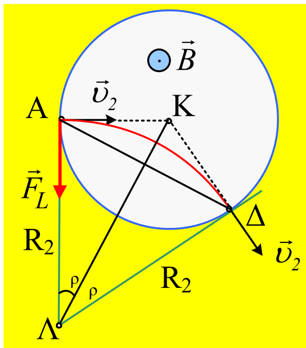
Όσον αφορά τη μεταβολή της ορμής, λαμβάνοντας υπόψη ότι το μέτρο της ταχύτητας (άρα και της ορμής) παραμένει σταθερό, θα έχουμε με βάση το διπλανό σχήμα:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda} - \vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda} + \left(-\vec{p}_{\alpha\rho\chi}\right)\rightarrow$$

$$|\Delta p| = \sqrt{\left(p_{\alpha\rho\chi}\right)^2 + \left(p_{\tau\varepsilon\lambda}\right)^2} = \left|p_{\alpha\rho\chi}\right|\sqrt{2} = 8\sqrt{2}\times 10^{-21} kgm/s$$

Ενώ η κατεύθυνση του διανύσματος σχηματίζει γωνία φ=45° με την κατεύθυνση της τελικής ορμής ή αν προτιμάται με την ακτίνα ΚΓ του μαγνητικού πεδίου.

ii) Αν αυξηθεί η ορμή του ιόντος, θα διαγράψει κυκλική τροχιά, μεγαλύτερης ακτίνας R_1, μέσα στο μαγνητικό πεδίο και θα εξέλθει από αυτό στο σημείο Δ, όπως στο σχήμα. Για την νέα ακτίνα θα έχουμε:



$$R_2 = \frac{m\upsilon_2}{Bq} = \frac{p_2}{B|e|} = \frac{8\sqrt{3}\times 10^{-21}}{0,5\cdot 1,6\cdot 10^{-19}} = 0,1\sqrt{3}m$$

α) Σκεπτόμενοι όπως και στο πρώτο ερώτημα, αν Λ το κέντρο της κυκλικής τροχιάς του ιόντος, οι ΛΑ και ΛΔ είναι εφαπτόμενες του κύκλου Κ, ενώ η ταχύτητα εξόδου έχει την διεύθυνση της ακτίνας ΚΔ. Από Π.Θ. στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΛ παίρνουμε:

$$(K\Lambda) = \sqrt{(AK)^2 + (A\Lambda)^2} = \sqrt{\alpha^2 + R_2^2} = \sqrt{0,1^2 + 3\cdot 0,1^2}m = 0,2m$$

Αλλά τότε η γωνία ΑΛΚ=ρ=30° (γωνία ορθογωνίου τριγώνου, απέναντι από κάθετη πλευρά, η οποία είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας) και η επίκεντρη γωνία ΑΚΔ παραπληρωματική της γωνίας 2ρ (του κέντρου Λ) είναι ίση με 120°.

β) Ο χρόνος κίνησης του ιόντος μέσα στο μαγνητικό πεδίο, αν διαγράφει κυκλική τροχιά με επίκεντρη γωνία τ° είναι ίσος:

$$t = \frac{\tau^o}{360^o}T = \frac{\tau^o}{360^o}\frac{2\pi m}{Bq}$$

Αλλά τότε την πρώτη φορά διαγράφει γωνία 90° και την δεύτερη φορά γωνία 2ρ=60°, οπότε θα έχουμε:

$$t_1 = \frac{90^\circ}{360^o}\frac{2\pi m}{Bq} = \frac{1}{4}\frac{2\pi m}{Bq} \quad \text{και} \quad t_2 = \frac{60^\circ}{360^o}\frac{2\pi m}{Bq} = \frac{1}{6}\frac{2\pi m}{Bq}$$

Διαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε:

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{\frac{1}{6}\frac{2\pi m}{Bq}}{\frac{1}{4}\frac{2\pi m}{Bq}} = \frac{2}{3} \rightarrow$$

$$t_2 = \frac{2}{3}t_1 = \frac{2}{3}\cdot 0,6ms = 0,4ms$$

dmargaris@gmail.com