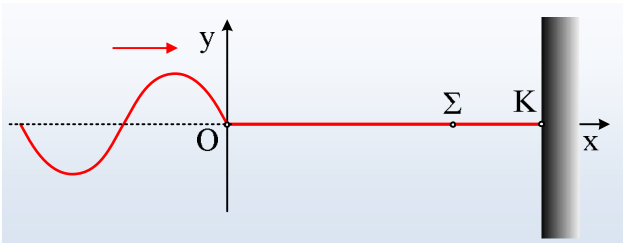
Ένα κύμα σε χορδή, ανακλάται

Κατά μήκος μιας ελαστικής χορδής, διαδίδεται χωρίς απώλειες, ένα αρμονικό κύμα με ταχύτητα υ=2m/s, πλάτος Α=0,4m και μήκος κύματος λ=2m το οποίο τη στιγμή $t_o=0$ φτάνει σε ένα σημείο Ο, το οποίο παίρνουμε σαν αρχή του προσανατολισμένο άξονα x΄x, με θετική την προς τα δεξιά κατεύθυνση. Το σημείο Ο απέχει κατά 3m από το άκρο Κ της χορδής, το οποίο έχει προσδεθεί σε κατακόρυφο τοίχο, όπως στο σχήμα, ενώ αρχίζει την ταλάντωσή του κινούμενο προς την θετική κατεύθυνση του άξονα y, προς τα πάνω.



i) Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου Ο, σε συνάρτηση με το χρόνο, καθώς και την εξίσωση του κύματος $y_1=f(x,t)$, για το κύμα που διαδίδεται προς τα δεξιά.

ii) Να βρεθεί η εξίσωση της απομάκρυνσης, εξαιτίας του παραπάνω κύματος, του σημείου Σ στην θέση $x_1=2,5m$.

iii) Αφού βρείτε την εξίσωση $y=f(t)$ για την απομάκρυνση του άκρου Κ της χορδής εξαιτίας του ανακλώμενου κύματος, να βρείτε την εξίσωση $y_2=f(x,t)$ για το κύμα το οποίο ανακλάται στο Κ.

iv) Να βρείτε την εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου Σ, εξαιτίας του κύματος το οποίο διαδίδεται προς τα αριστερά, καθώς και την εξίσωση $y=f(t)$ της απομάκρυνσής του, λόγω συμβολής των δύο κυμάτων.

v) Αφού βρείτε την εξίσωση του στάσιμου κύματος που δημιουργείται πάνω στην χορδή, να σχεδιάσετε την μορφή της στην περιοχή μεταξύ των σημείων Ο και Κ, τη χρονική στιγμή t=2,25s. Να υπολογίσετε την παραπάνω στιγμή την ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου Σ.

Απάντηση:

i) Αφού το σημείο Ο ξεκινά την ταλάντωσή του τη στιγμή t=0 από την θέση ισορροπίας του, η εξίσωση της απομάκρυνσής του είναι της μορφής:

$$y_O = A\cdot \eta\mu(\omega t) = 0,4\cdot \eta\mu(\omega t) \quad \text{(μονάδες στο S.I.)}$$

Αλλά αφού $\upsilon = \lambda f = \dfrac{\lambda}{T} \rightarrow T = \dfrac{\lambda}{\upsilon} = 1s$ η εξίσωση του κύματος, παίρνει την γνωστή μορφή:

$$y_1 = A\cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right) = 0,4\cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{1}-\frac{x}{2}\right) = 0,4\cdot \eta\mu(2\pi t - \pi x)\ (S.I.)\ (1)$$

ii) Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (1) x=2,5m, παίρνουμε για το σημείο Σ, την εξίσωση:

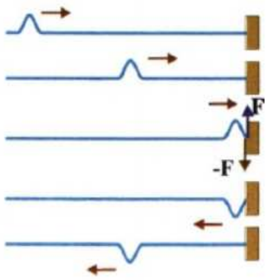
$$y_{\Sigma,1} = 0{,}4 \cdot \eta\mu(2\pi t - \pi x) = 0{,}4 \cdot \eta\mu(2\pi t - 2{,}5\pi) \text{ (S.I.) με } t \geq \frac{x}{\upsilon} \rightarrow t \geq 1{,}25s \quad (2)$$

Θα μπορούσαμε να μετατρέψουμε την εξίσωση (2) δίνοντάς της την «τελική» μορφή της

$$y_{\Sigma,1} = -0{,}4 \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi t)$$

Αλλά δεν υπάρχει κανένας λόγος να παίξουμε με τριγωνομετρικές μετατροπές που θολώνουν, χωρίς να ξεκαθαρίζουν το τοπίο, αφού μπορούμε να εκμεταλλευτούμε την μορφή (2) και να βρούμε και το χρόνο έναρξης της ταλάντωσης του Σ, μέσω της φάσης της απομάκρυνσης.

iii) Για την απομάκρυνση του Κ εξαιτίας του κύματος προς τα δεξιά, θα έχουμε με αντικατάσταση στην αντίστοιχη εξίσωση του κύματος:



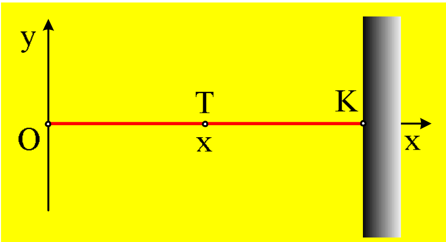
Σχ. 2.15 Ο κυματικός παλμός ανακλάται στο σταθερό εμπόδιο και διαδίδεται αντίθετα.

$$y_{K,1} = 0{,}4 \cdot \eta\mu(2\pi t - \pi x) = 0{,}4 \cdot \eta\mu(2\pi t - 3\pi) \quad \text{με } t \geq 1{,}5\text{s}$$

Αλλά τότε, λαμβάνοντας υπόψη μας την αλλαγή φάσης κατά π, λόγω ανάκλασης, (δες διπλανό σχήμα του βιβλίου...) θα έχουμε το σημείο Κ να λειτουργεί σαν πηγή, για το κύμα προς τα αριστερά με εξίσωση*:

$$y_{K,2} = -0{,}4 \cdot \eta\mu(2\pi t - 3\pi) = 0{,}4 \cdot \eta\mu(2\pi t - 3\pi - \pi) \rightarrow$$
$$y_{K,2} = 0{,}4 \cdot \eta\mu(2\pi t - 4\pi) \quad \mu\varepsilon\ t \geq 1{,}5s$$

Αλλά παίρνοντας τώρα ένα τυχαίο σημείο Τ στη θέση x, όπως στο σχήμα, το κύμα προς τα αριστερά θα καθυστερήσει να φτάσει σε αυτό κατά:



$$\Delta t = \frac{d}{\upsilon} = \frac{3-x}{2} \text{ (μονάδες στο S.I.)}$$

οπότε η εξίσωση της απομάκρυνσης του Τ (η εξίσωση του 2ου κύματος) θα παίρνει τη μορφή:

$$y_2 = 0{,}4 \cdot \eta\mu\big(2\pi(t - \Delta t) - 4\pi\big) = 0{,}4 \cdot \eta\mu\left(2\pi\left(t - \frac{3-x}{2}\right) - 4\pi\right) \rightarrow$$

$$y_2 = 0{,}4 \cdot \eta\mu\big(2\pi t + \pi x - 7\pi\big) \text{ (S.I.)} \quad (3)$$

iv) Με αντικατάσταση στην (3) x=2,5m θα πάρουμε για την απομάκρυνση του σημείου Σ, λόγω του κύματος προς τα αριστερά:

$$y_{\Sigma,2} = 0{,}4 \cdot \eta\mu\big(2\pi t + \pi \cdot 2{,}5 - 7\pi\big) = 0{,}4 \cdot \eta\mu\big(2\pi t - 4{,}5\pi\big) \text{ με } t \geq 1{,}75\text{s} \quad (2\alpha)$$

Αν συγκρίνουμε τις φάσεις για τις απομακρύνσεις εξαιτίας των δύο κυμάτων (εξισώσεις (2) και (2α)) του σημείου Σ, θα βρούμε ότι παρουσιάζουν διαφορά φάσης Δφ=2πt-2,5π-2πt+4,5π=2π, δηλαδή τα δύο κύματα συμβάλουν σε συμφωνία φάσης, οπότε έχουμε σημείο με ενισχυτική συμβολή, κοιλία του στάσιμου κύματος, το οποίο ταλαντώνεται με μέγιστο πλάτος Α΄=2Α=0,8m!

Ας το δούμε και με εξισώσεις!

Από την αρχή της επαλληλίας παίρνουμε:

$$y_\Sigma = y_{\Sigma,1} + y_{\Sigma,2} = 0,4 \cdot \eta\mu(2\pi t - 2,5\pi) + 0,4 \cdot \eta\mu(2\pi t - 4,5\pi) \rightarrow$$

$$y_\Sigma = 2 \cdot 0,4 \cdot \eta\mu \frac{2\pi t - 2,5\pi + 2\pi t - 4,5\pi}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi t - 2,5\pi - 2\pi t + 4,5\pi}{2} \rightarrow$$

$$y_\Sigma = 0,8 \cdot \eta\mu(2\pi t - 3,5\pi) \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi) = -0,8 \cdot \eta\mu(2\pi t - 3,5\pi) \quad (2\beta)$$

v) Το κύμα προς τα αριστερά έχει διαδοθεί κατά $d = \upsilon\Delta t = \upsilon(t - t_K) = 2 \cdot (2,25 - 1,5)m = 1,5m$ από το άκρο Κ, φτάνοντας στην θέση x=1,5m. Αλλά τότε στην περιοχή $1,5m \leq x \leq 3m$ θα έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα με εξίσωση:

$$y = y_1 + y_2 = 0,4 \cdot \eta\mu(2\pi t - \pi x) + 0,4 \cdot \eta\mu(2\pi t + \pi x - 7\pi) \rightarrow$$

$$y = 2 \cdot 0,4\eta\mu \frac{2\pi t - \pi x + 2\pi t + \pi x - 7\pi}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi t - \pi x - 2\pi t - \pi x + 7\pi}{2} \rightarrow$$

$$y = 0,8 \cdot \eta\mu\left(2\pi t - \frac{7\pi}{2}\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(-\pi x + \frac{7\pi}{2}\right) \rightarrow$$

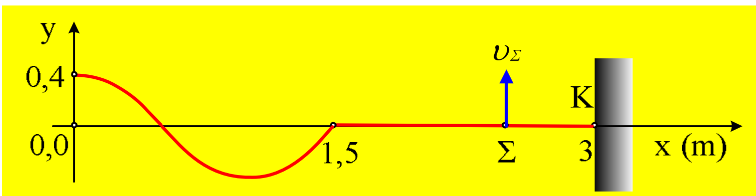
$$y = -0,8 \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi t) \cdot \eta\mu(\pi x) \quad (4)$$

Η εξίσωση (4) είναι η εξίσωση του στάσιμου στην παραπάνω περιοχή, ενώ στην περιοχή $0 \leq x \leq 1,5m$ διαδίδεται το κύμα προς τα δεξιά με εξίσωση (1), οπότε για τη στιγμή t=2,25s θα έχουμε τις συναρτήσεις:

$y = 0,4 \cdot \eta\mu(2\pi \cdot 2,25 - \pi x) = 0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x)$ για $0 \leq x \leq 1,5m$ και

$y = -0,8 \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi \cdot 2,25) \cdot \eta\mu(\pi x) = 0$ για $1,5 \leq x \leq 3m$

Η γραφική παράσταση των οποίων μας δίνει τη μορφή της χορδής, όπως στο διάγραμμα:



Ενώ για την ταχύτητα του σημείου Σ, λαμβάνοντας υπόψη την εξίσωση (2β) της απομάκρυνσης, θα έχουμε:

$$\upsilon_\Sigma = -0,8 \cdot 2\pi \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi t - 3,5\pi) = -1,6\pi \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi \cdot 2,25 - 3,5\pi) = 1,6\pi \ m/s$$

Σχόλιο *

Δεν θα άλλαζε κάτι επί της ουσίας, αν είχαμε προσθέσει το π στην εξίσωση της ταλάντωσης του Κ, δηλαδή γράφαμε:

$$y_{K,2} = -0,4 \cdot \eta\mu(2\pi t - 3\pi) = 0,4 \cdot \eta\mu(2\pi t - 3\pi + \pi) \rightarrow$$

$$y_{K,2} = 0,4 \cdot \eta\mu(2\pi t - 2\pi) \quad \mu\varepsilon\ t \geq 1,5s$$

Μια διαφορά κατά 2π στην φάση, χωρίς σημασία...

dmargaris@gmail.com