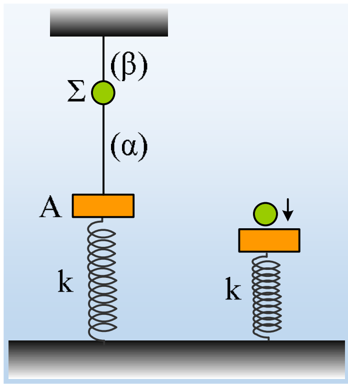
Η τάση του νήματος και μια κρούση



Το σώμα Α μάζας m_1 =2kg ηρεμεί δεμένο στο πάνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=80N/m, ενώ συνδέεται με αβαρές κατακόρυφο νήμα (α) με σφαίρα Σ, μάζας m_2=0,5kg. Η σφαίρα κρέμεται στο άκρο δεύτερου νήματος (β), όπως στο σχήμα.

i) Αν η τάση του νήματος (β) είναι 13N, πόση είναι η παραμόρφωση του ελατηρίου;

Σε μια στιγμή κόβουμε το νήμα (β).

ii) Τι θα κάνει το νήμα (α), θα παραμείνει τεντωμένο; Να υπολογίσετε τις επιταχύνσεις των δύο σωμάτων, αμέσως μετά το κόψιμο του νήματος.

Στη συνέχεια το σώμα Α εκτελεί αατ, ενώ η σφαίρα κτυπά το σώμα Α, την στιγμή που μηδενίζεται για πρώτη φορά η ταχύτητα του σώματος Α. Αν η κρούση είναι κεντρική και ελαστική ενώ αμέσως μετά απομακρύνουμε την σφαίρα Σ.

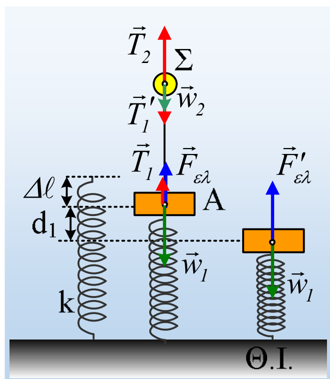
iii) Να βρεθεί το μήκος του νήματος (α).

iv) Να υπολογίσετε την μεταβολή της ορμής της σφαίρας, η οποία οφείλεται στην κρούση.

v) Πόση είναι τελικά η ενέργεια ταλάντωσης του σώματος Α, μετά την κρούση;

Δίνεται g=10m/s^2 και π^2=10.

Απάντηση:



i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται σε σφαίρα και σώμα Α, ενώ Δl είναι η συσπείρωση του ελατηρίου στην αρχική θέση ισορροπίας του σώματος Α (υποθέτουμε ότι το ελατήριο έχει συσπειρωθεί κατά Δl). Στο δεξιό σχήμα φαίνεται το σώμα Α στην θέση ισορροπίας της ταλάντωσης που θα ακολουθήσει, όπου το ελατήριο έχει συσπειρωθεί κατά Δl+d_1.

Από την ισορροπία της σφαίρας έχουμε:

$$\Sigma\vec{F} = 0 \xrightarrow{\mu \acute{\varepsilon} \tau \rho \alpha} T_2 = w_2 + T_1' \rightarrow$$

$$T_1' = T_2 - m_2 g = 13N - 0{,}5 \cdot 10N = 8N$$

Όπου T_1'= T_1=8N η τάση του (α) νήματος. Ομοίως για το σώμα Α:

$$\Sigma\vec{F} = 0 \xrightarrow{\mu \acute{\varepsilon} \tau \rho \alpha} T_1 + F_{\varepsilon\lambda} = w_1 \rightarrow k|\Delta l| = m_1 g - T_1 \rightarrow$$

$$|\Delta l| = \frac{m_1 g - T_1}{k} = \frac{2 \cdot 10 - 8}{80} m = 0{,}15m$$

ii) Με βάση τις δυνάμεις που έχουμε σχεδιάσει στο παραπάνω σχήμα, η σφαίρα τείνει να αποκτήσει επιτάχυνση μεγαλύτερη από g (w_2+T_1'=m_2α), ενώ το σώμα Α επιτάχυνση μικρότερη από g. Αλλά τότε η σφαίρα τείνει να πλησιάζει το σώμα Α και το νήμα χαλαρώνει. Έτσι ο όποιος παραπέρα υπολογισμός θα ξεκινά από την λογική ότι στα δυο σώματα δεν ασκείται τάση του νήματος (α), οπότε κινούνται ανεξάρτητα το ένα του άλλου. Έτσι εφαρμόζοντας το θεμελιώδη νόμο της δυναμικής για κάθε σώμα, με θετική φορά προς τα κάτω, παίρνουμε:

Σώμα Α: $\Sigma\vec{F} = m_1\vec{\alpha}_1 \rightarrow a_1 = \frac{m_1 g - F_{\varepsilon\lambda}}{m_1} = \frac{2\cdot 10 - 80\cdot 0{,}15}{2}\ {}^{m}/_{s^2} = 4\,{}^{m}/_{s^2}.$

Σφαίρα: $\Sigma\vec{F} = m_2\vec{\alpha}_2 \rightarrow w_2 = m_2 a_2 \rightarrow\ a_2 = g = 10\,{}^{m}/_{s^2}.$

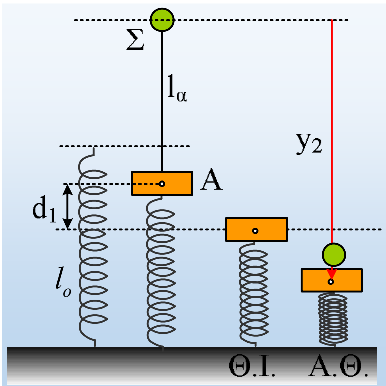
iii) Αφού το νήμα χαλαρώνει το σώμα Α θα εκτελέσει ααt, γύρω από μια θέση ισορροπίας, όπου:

$$\Sigma\vec{F} = 0 \xrightarrow{\mu\acute{\varepsilon}\tau\rho\alpha} F'_{\varepsilon\lambda} = w_1 \rightarrow k|\Delta l + d_1| = m_1 g \rightarrow$$

$$|\Delta l + d_1| = \frac{m_1 g}{k} = \frac{2\cdot 10}{80}m = 0{,}25m\ \rightarrow d_1 = 0{,}25m - 0{,}15m = 0{,}1m$$

Και με περίοδο:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{80}}s = 1s$$



Αλλά τότε το σώμα Α, ξεκινώντας από την πάνω ακραία θέση της ταλάντωσής του θα ταλαντωθεί με πλάτος $A_1 = d_1 = 0{,}1m$ και θα φτάσει στην κάτω ακραία θέση, την χρονική $t_1 = ½\ T = 0{,}5s$, με μηδενική ταχύτητα, όπου θα συγκρουσθεί με την σφαίρα.

Όμως η σφαίρα εκτελεί ελεύθερη πτώση, για την οποία:

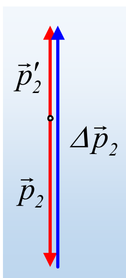
$$\upsilon_2 = gt = 10\cdot 0{,}5\,{}^{m}/_{s} = 5\,{}^{m}/_{s} \text{ και}$$

$$y_2 = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}10\cdot 0{,}5^2 m = 1{,}25m$$

Όμως η παραπάνω απόσταση y_2 που διανύει η σφαίρα, είναι ίση με το μήκος του νήματος (α) l_α συν το διπλάσιο του πλάτους της ταλάντωσης του σώματος Α:

$$y_2 = l_\alpha + 2A_1 \rightarrow l_\alpha = y_2 - 2A_1 = 1{,}25m - 2\cdot 0{,}1m = 1{,}05m$$

iv) Οι ταχύτητες των δύο σωμάτων, μετά την κεντρική και ελαστική μεταξύ τους κρούση είναι (πριν την κρούση έχουμε $\upsilon_1 = 0$ και $\upsilon_2 = 5m/s$, θεωρώντας την προς τα κάτω κατεύθυνση ως θετική):



$$\upsilon'_1 = \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_2 = \frac{2\cdot 0{,}5}{2 + 0{,}5}5m/s = 2m/s \text{ και}$$

$$\upsilon'_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_2 = \frac{0{,}5 - 2}{2 + 0{,}5}5m/s = -3m/s$$

Με βάση τις παραπάνω τιμές για τις ταχύτητες της σφαίρας, θα έχουμε για την μεταβολή της ορμής της:

$$\Delta\vec{p}_2 = \vec{p}\,'_2 - \vec{p}_2 \rightarrow \Delta p_2 = m_2\upsilon'_2 - m_2\upsilon_2 \rightarrow$$
$$\Delta p_2 = 0,5\cdot(-3)kg\cdot m/s - 0,5\cdot 5kg\cdot m/s = -4kg\cdot m/s$$

v) Μετά την κρούση το σώμα Α, θα ξεκινήσει μια νέα ταλάντωση, γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας, με αρχική απομάκρυνση $y_1'=0,1m$ και αρχική ταχύτητα $\upsilon_1'=2m/s$, οπότε η ενέργεια ταλάντωσης θα είναι:

$$E_1 = K + U = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}ky_1'^2 = \frac{1}{2}2\cdot 2^2 J + \frac{1}{2}80\cdot 0{,}1^2 J = 4{,}4J$$

dmargaris@gmail.com