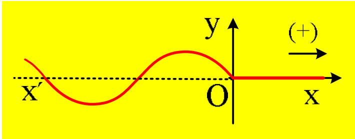
# *Δύο εγκάρσια κύματα συμβάλλουν*




Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου, διαδίδεται ένα εγκάρσιο αρμονικό κύμα, το οποίο τη στιγμή $t_0=0$ φτάνει σε ένα σημείο Ο, το οποίο παίρνουμε ως αρχή ενός προσανατολισμένου άξονα xx΄, με την προς τα δεξιά κατεύθυνση θετική. Το κύμα αυτό περιγράφεται από την εξίσωση:

$$y_1 = 0{,}2 \cdot \eta\mu(2\pi t - \pi x) \ \ (S.I.)$$

i) Να υπολογιστούν η ταχύτητα και το μήκος κύματος, για το κύμα αυτό.

ii) Να βρεθεί η ταχύτητα ταλάντωσης ενός σημείου Σ, στη θέση x=-1m σε συνάρτηση με το χρόνο, εξαιτίας του κύματος αυτού. Ποια η ταχύτητα του Σ τη στιγμή $t_1=2s$;

Στο ίδιο μέσο διαδίδεται ένα δεύτερο κύμα προς τα αριστερά και την στιγμή $t_0$, έχει φτάσει στο σημείο Β. Από την συμβολή των δύο κυμάτων δημιουργείται ένα στάσιμο κύμα, ενώ τη στιγμή $t_1=2s$ έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα στην περιοχή $-1 \le x \le 4m$, με δεσμό στη θέση x=-1m.

iii) Να βρεθεί η θέση του σημείου Β, καθώς και η εξίσωση του 2ου κύματος, το οποίο διαδίδεται προς τα αριστερά.

iv) Ποια η εξίσωση του στάσιμου κύματος, που δημιουργείται από την συμβολή των δύο παραπάνω κυμάτων.

v) Να σχεδιάσετε την μορφή μιας περιοχής του μέσου με $-3m \le x \le 5m$, τη χρονική στιγμή $t_1$.

***Απάντηση.***

i) Η γενική εξίσωση ενός κύματος, όπως το παραπάνω, έχει την μορφή:

$$y = 0{,}2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \ \ (\alpha)$$

Από την σύγκριση με την εξίσωση που μας δίνεται, βρίσκουμε:

$$2\pi\frac{t}{T} = 2\pi t \ \rightarrow T = 1s \rightarrow f = 1Hz \ \text{ και } \ 2\pi\frac{x}{\lambda} = \pi x \rightarrow \lambda = 2m$$

Οπότε $\upsilon = \lambda f = 2 \cdot \frac{1m}{s} = 2\frac{m}{s}$

ii) Με αντικατάσταση στην εξίσωση του κύματος x=-1m παίρνουμε την απομάκρυνση του σημείου Σ:

$$y_1 = 0{,}2 \cdot \eta\mu(2\pi t - \pi x) = 0{,}2 \cdot \eta\mu(2\pi t + \pi) = -0{,}2 \cdot \eta\mu(2\pi t) \ (1)$$

Οπότε η εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσής του, έχει την μορφή:

$$\upsilon = \omega A \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi t + \pi) = -\omega A \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi t) = -0{,}4\pi \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi t) \ (\text{S.I.}) \ \ (2)$$

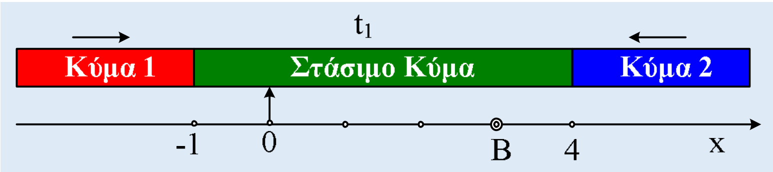
Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της παραπάνω συνάρτησης (1); Το κύμα φτάνει στο Ο τη στιγμή $t_0=0$, άρα στο Σ έφτασε πιο πριν κατά διάστημα $d=\upsilon\cdot\Delta t \rightarrow \Delta t = \frac{|x_O - x_\Sigma|}{\upsilon} = \frac{1}{2}s = 0{,}5s$. Αλλά τότε το σημείο Σ ταλαντώνεται για $t \ge -0{,}5s$.

**Σημείωση**: Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε αν χρησιμοποιήσουμε την φάση από την εξίσωση (1) (πριν τις τριγωνομετρικές… αλλαγές!). Έτσι τη στιγμή t΄ όπου αρχίζει το σημείο Σ να ταλαντώνεται, θα έχουμε φ=0, οπότε $\varphi = 2\pi t + \pi = 0 \rightarrow\ t' =- 1s.$

Αν τώρα αντικαταστήσουμε στην εξίσωση (2) $t_1$=2s παίρνουμε:

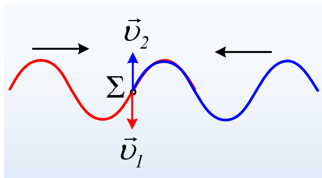
$$\upsilon_1 =- 0{,}4\pi \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi t) =- 0{,}4\pi \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi \cdot 2) =- 0{,}4\pi \frac{m}{s}.$$

iii) Τη στιγμή $t_1$ στο γραμμικό μέσο, διακρίνουμε τρεις περιοχές, όπως φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:




Η ταχύτητα διάδοσης των δύο κυμάτων, είναι ίδια, αφού αυτή καθορίζεται από την φύση του μέσου. Αλλά αν το κύμα προς τα δεξιά διαδίδεται με ταχύτητα υ=2m/s, την ίδια ταχύτητα διάδοσης έχει και το κύμα προς τα αριστερά. Αν τώρα τη στιγμή $t_1$ το κύμα αυτό έχει φτάσει στην θέση x=-1m, σημαίνει ότι την στιγμή $t_0$=0 είχε φτάσει σε μια θέση Β, όπου $|x_B-x_\Sigma|$=4m οπότε $x_B$=3m.

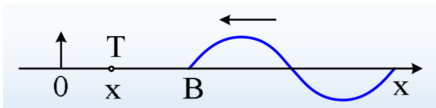
Εξάλλου αφού στο σημείο Σ δημιουργείται δεσμός του στάσιμου κύματος, σημαίνει ότι τα δύο κύματα συμβάλλουν και οι ταχύτητες ταλάντωσης, εξαιτίας των δύο κυμάτων είναι αντίθετες.




Αλλά στο προηγούμενο ερώτημα βρήκαμε ότι η ταχύτητα του σημείου Σ εξαιτίας του κύματος $y_1$ είναι ίση με $\upsilon_1$=-0,4π m/s, οπότε εξαιτίας του κύματος $y_2$, το οποίο διαδίδεται προς τα αριστερά, θα έχει ταχύτητα $\upsilon_2$=+0,4π m/s, όπως στο σχήμα. Αλλά τότε το κύμα προς τα αριστερά, θα έχει το ίδιο πλάτος, το ίδιο μήκος και το σημείο στο οποίο φτάνει θα αρχίσει την ταλάντωσή του κινούμενο προς την θετική κατεύθυνση (προς τα πάνω). Συνεπώς τη στιγμή t=0 το σημείο Β αρχίζει να ταλαντώνεται με εξίσωση:

$$y_B = 0{,}2 \cdot \eta\mu(2\pi t) \text{ μονάδες στο S.I. } (3)$$

Έστω τώρα ένα τυχαίο σημείο Τ, στην θέση x, όπως στο σχήμα. Το κύμα για να φτάσει από το Σ στο Τ θα χρειαστεί χρονικό διάστημα:




$$\Delta t = \frac{(T\Sigma)}{\upsilon} = \frac{3-x}{2} \text{ (S.I.)}$$

οπότε η εξίσωση της απομάκρυνσης του τυχαίου σημείου Τ, θα παίρνει την μορφή:

$$y_2 = 0{,}2 \cdot \eta\mu[2\pi(t-\Delta t)] = 0{,}2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(t - \frac{3-x}{2}\right) \rightarrow$$

$$y_2 = 0{,}2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(t + \frac{x}{2} - \frac{3}{2}\right)\ (S.I.)\ \ (4)$$

Η εξίσωση (4), είναι η εξίσωση του κύματος προς τα αριστερά.

iv) Με βάση την αρχή της επαλληλίας, για την περιοχή που έχουμε συμβολή των δύο κυμάτων, θα ισχύει:

$$y = y_1 + y_2 = 0{,}2 \cdot \eta\mu(2\pi t - \pi x) + 0{,}4 \cdot \eta\mu 2\pi\left(t + \frac{x}{2} - \frac{3}{2}\right) \rightarrow$$

$$y = 2 \cdot 0{,}2 \cdot \eta\mu \frac{2\pi t - \pi x + 2\pi t + \pi x - 3\pi}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi t - \pi x - 2\pi t - \pi x + 3\pi}{2} \rightarrow$$

$$y = 0{,}4 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} - \pi x\right) \cdot \eta\mu\left(2\pi t - \frac{3\pi}{2}\right) \xrightarrow{\tau\rho\iota\gamma\omega\nu.}$$

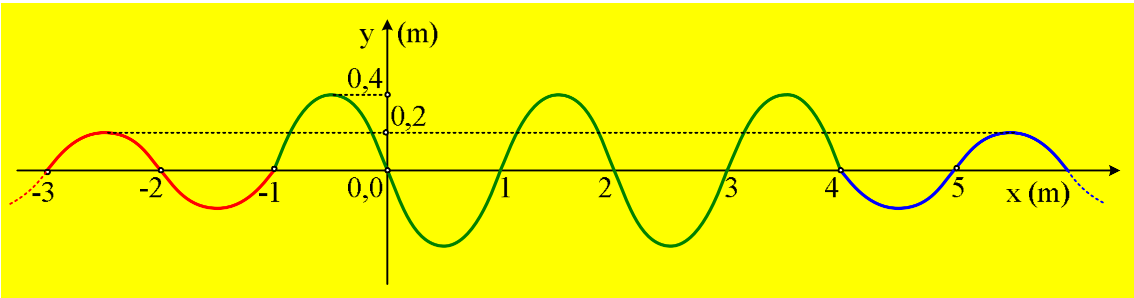
$$y = 0{,}4 \cdot \big(-\eta\mu(\pi x)\big) \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi t) = -\,0{,}4 \cdot \eta\mu(\pi x) \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi t) \quad (S.I.) \quad (5)$$

Η παραπάνω εξίσωση (5) περιγράφει το στάσιμο κύμα, όπου τη στιγμή $t_1$ έχει σχηματισθεί στην περιοχή:

$$-1m \le x \le 4m$$

Ενώ έξω από την περιοχή αυτή έχουμε τα δυο τρέχοντα κύματα που περιγράφονται από τις εξισώσεις (α) και (4).

v) Με βάση τα παραπάνω ευρήματα η μορφή του μέσου τη στιγμή $t_1$=2s έχει τη μορφή του σχήματος:




dmargaris@gmail.com