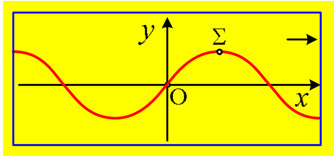
Γράφοντας εξίσωση για ένα κύμα, χωρίς τέλος



Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου, πολύ μεγάλου μήκους, διαδίδεται από αριστερά προς τα δεξιά (θετική φορά) ένα αρμονικό κύμα, πλάτους Α=0,4m και μήκους κύματος λ=2m, με ταχύτητα υ=2m/s. Στο διπλανό σχήμα βλέπετε μια μικρή περιοχή του κύματος (το οποίο έχει διαδοθεί πολύ πέρα του δεξιού άκρου του σχήματος). Για να γράψουμε εξίσωση για το κύμα αυτό, παίρνουμε ένα σύστημα αξόνων x,y με αρχή το σημείο Ο και θεωρούμε επίσης τη στιγμή που έχουμε το παραπάνω στιγμιότυπο, ως αρχή μέτρησης των χρόνων (t_0=0).

i) Με βάση τις παραπάνω παραδοχές, να βρεθεί η εξίσωση του κύματος, για το παραπάνω κύμα.

ii) Ποια η φάση της απομάκρυνσης των σημείων Ο και Σ τη στιγμή t_0=0;

iii) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της φάσης της απομάκρυνσης του σημείου Σ, σε συνάρτηση με το χρόνο (φ=*f*(t)).

iv) Να σχεδιάστε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t_1=1,25s, για την ίδια περιοχή του μέσου.

v) Να παραστήσετε επίσης γραφικά την ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου Σ σε συνάρτηση με το χρόνο, από t_0 έως t_1.

Απάντηση:

i) Αφού το κύμα διαδίδεται προς τα δεξιά, μετά από λίγο το σημείο Ο, στην αρχή των αξόνων, θα βρεθεί με αρνητική απομάκρυνση (θα κινηθεί προς τα κάτω στο σχήμα). Αλλά αυτό σημαίνει ότι τη στιγμή t_0=0 περνά από τη θέση ισορροπίας του κινούμενο προς την αρνητική κατεύθυνση και παρουσιάζει αρχική φάση ίση με π (rad). Εξάλλου έχουμε:

$$\upsilon = \lambda \cdot f = \frac{\lambda}{T} \rightarrow T = \frac{\lambda}{\upsilon} = 1s.$$

Έτσι η εξίσωση της απομάκρυνσης για την ταλάντωση που πραγματοποιεί το σημείο Ο, έχει τη μορφή:

$$y_o = A \cdot \eta\mu(\omega t + \pi) = 0{,}4 \cdot \eta\mu(2\pi t + \pi) = 0{,}4 \cdot \eta\mu 2\pi\left(t + \frac{1}{2}\right) \ \text{(S.I.)}$$

Αλλά τότε η εξίσωση του κύματος παίρνει τη μορφή:

$$y = A \cdot \eta\mu 2\pi\left(t - \frac{x}{\lambda} + \frac{1}{2}\right) = 0{,}4 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\mathrm{t} - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right) \ \text{(S.I.)} \ (1)$$

ii) Για τις φάσεις των διαφόρων σημείων έχουμε:

$$\varphi = 2\pi\left(\mathrm{t} - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right) \quad (2)$$

όποτε τη στιγμή t_0=0 θα έχουμε:

Για το σημείο Ο, όπου x=0:

$$\varphi_o = 2\pi\left(t - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right) = \pi \, rad$$

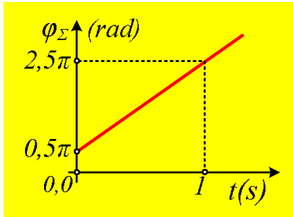
Για το σημείο Σ στη θέση x=λ/4=0,5m:

$$\varphi_\Sigma = 2\pi\left(t - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right) = 2\pi\left(0 - \frac{0,5}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\ rad.$$

iii) Επανερχόμαστε στη φάση της απομάκρυνσης του σημείου Σ, παίρνοντας:

$$\varphi_\Sigma = 2\pi\left(t - \tfrac{x}{2} + \tfrac{1}{2}\right) = 2\pi\left(\mathrm{t} + \tfrac{1}{4}\right) = 2\pi t + \tfrac{\pi}{2}\ \ \text{(S.I.)}$$

Μια συνάρτηση πρώτου βαθμού με γραφική παράσταση ευθεία, όπως στο διπλανό διάγραμμα.

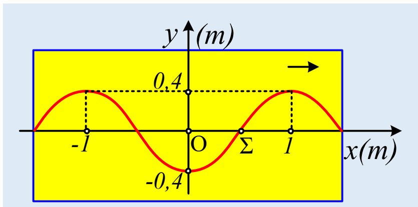


iv) Αντικαθιστώντας στην εξίσωση του κύματος (1), t_1=2,5s, θα πάρουμε:

$$\mathrm{y} = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi\left(t - \tfrac{x}{2} + \tfrac{1}{2}\right) = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi\left(1,25 - \tfrac{x}{2} + \tfrac{1}{2}\right) = 0,4 \cdot \eta\mu(3,5\pi - \pi x) \rightarrow$$

$$\mathrm{y} = 0,4 \cdot \eta\mu(2\pi + 1,5\pi - \pi x) = -0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x)$$

Η παραπάνω σχέση δεν είναι τίποτα άλλο από τη συνάρτηση *y=f(x)* τη στιγμή t_1 και για την περιοχή του «παραθύρου» μας, που δεν είναι άλλη, από την περιοχή -1,5m ≤ x ≤ 1,5m, όπως εύκολα εξάγεται από το σχήμα (λ=2m). Αλλά τότε η γραφική παράσταση *y=f(x)* (το στιγμιότυπο του κύματος) παίρνει τη μορφή του παρακάτω σχήματος:



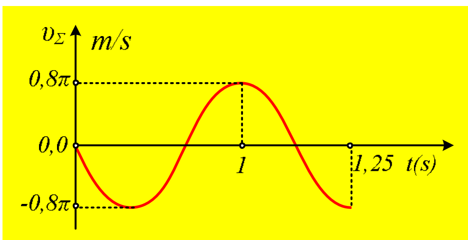
v) Αντικαθιστώντας τώρα στην εξίσωση του κύματος (1) x=0,5m, βρίσκουμε την απομάκρυνση για την ταλάντωση του σημείου Σ:

$$y_\Sigma = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi\left(t - \tfrac{x}{2} + \tfrac{1}{2}\right) = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi\left(t + \tfrac{1}{4}\right)\ \ \text{(S.I.)}$$

Αλλά τότε η ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου Σ, ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\upsilon_\Sigma = \mathrm{A}\omega \cdot \mathrm{\sigma\upsilon\nu} 2\pi\left(t + \tfrac{1}{4}\right) = 0,8\pi \cdot \sigma\upsilon\nu\left(2\pi t + \tfrac{\pi}{2}\right) = -0,8\pi \cdot \mathrm{\eta\mu}(2\pi t)\ \ \text{με } 0 \le t \le 1,25\text{s}.$$

Με γραφική παράσταση, όπως στο σχήμα:



dmargaris@gmail.com