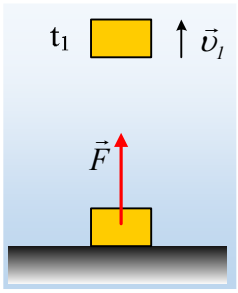
Ένα σώμα κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω.



Ένα σώμα μάζας 1,2kg ηρεμεί στο έδαφος. Σε μια στιγμή t_0=0, ασκούμε πάνω του μια σταθερή κατακόρυφη δύναμη, με φορά προς τα πάνω, μέτρου F=18N, μέχρι τη στιγμή t_1=4s, όπου η δύναμη F, καταργείται.

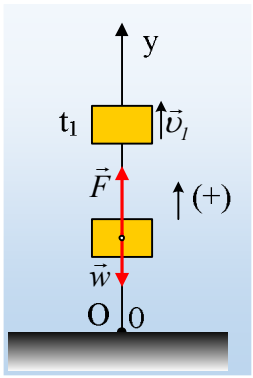
i) Να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος την στιγμή t_1, καθώς και το ύψος από το έδαφος που βρίσκεται.

ii) Να βρεθεί ποια χρονική στιγμή το σώμα θα πάψει να ανέρχεται και σε ποιο ύψος βρίσκεται τη στιγμή αυτή το σώμα;

iii) Να βρεθούν οι χρονικές στιγμές όπου το σώμα περνά από μια θέση Γ, σε ύψος 55m. Με ποια ταχύτητα περνά το σώμα από την θέση Γ;

Δίνεται g=10m/s^2.

Απάντηση:



i) Το σώμα έχει βάρος w=mg=1,2·10N=12N, οπότε μόλις δεχτεί την δύναμη F>w, αρχίζει να ανέρχεται, χάνοντας την επαφή του με το έδαφος, όπως στο σχήμα, όπου η αρχική θέση O, λαμβάνεται ως αρχή ενός προσανατολισμένου άξονα με θετική κατεύθυνση προς τα πάνω. Από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα παίρνουμε:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \rightarrow F - w - m\alpha \rightarrow$$

$$\alpha = \frac{F-w}{m} = \frac{18N - 12N}{1{,}2kg} = 5\,{}^{m}/_{s^2}$$

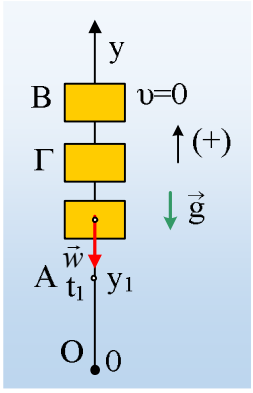
Αλλά αφού το σώμα αποκτά σταθερή επιτάχυνση θα εκτελέσει μια ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη (επιταχυνόμενη) κίνηση για την οποία ισχύουν οι εξισώσεις:

$$\upsilon = \alpha t \quad (1) \qquad \Delta y = y = \frac{1}{2}\alpha\, t^2 \quad (2)$$

Με αντικατάσταση t=t_1=4s βρίσκουμε:

$$\upsilon_1 = \alpha t_1 = 5 \cdot 4\ {}^{m}/_{s} = 20\ {}^{m}/_{s}.$$

$$y_1 = h_1 = \frac{1}{2}a\, t_1^2 = \frac{1}{2}5 \cdot 4^2 m = 40m$$



ii) Μόλις καταργηθεί η δύναμη F, το σώμα δεν θα πάψει να κινείται προς τα πάνω, αφού η ταχύτητά του υ_1, έχει φορά προς τα πάνω! Απλά κινείται με την επίδραση μόνο του βάρους αποκτώντας επιτάχυνση α΄=-g (με φορά προς τα κάτω), εκτελώντας μια νέα ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση για την οποία ισχύουν οι εξισώσεις:

$$\upsilon = \upsilon_1 + \alpha'\Delta t = \upsilon_1 - \mathrm{g}(\mathrm{t} - t_1)\ (1\mathrm{a})$$

$$\Delta y = y - y_1 = \upsilon_1 \Delta t + \frac{1}{2} a' \Delta t^2 = \upsilon_1 (t - t_1) - \frac{1}{2} g\,(t - t_1)^2 \quad (2a)$$

Το σώμα σταματά την άνοδό του, στη θέση Β, όπου μηδενίζεται η ταχύτητά του, τη στιγμή t_2, οπότε από την εξίσωση (1a) παίρνουμε:

$$\upsilon = \upsilon_1 - \mathrm{g}(\mathrm{t} - t_1) = 0 \ \rightarrow 20 - 10(t-4) \rightarrow 20 - 10t + 40 = 0 \rightarrow$$

$$t_2 = 6s$$

Και με αντικατάσταση στην (2a) βρίσκουμε:

$$y - y_1 = \upsilon_1 (t - t_1) - \frac{1}{2} g\,(t - t_1)^2 \ \rightarrow$$

$$y - 40m = 20(6-4)m - \frac{1}{2} 10 \cdot (6-4)^2 \ \mathrm{m} \rightarrow$$

$$y_2 = h_{max} = 60m$$

iii) Με αντικατάσταση στην (2a) y=55m παίρνουμε:

$$55 - 40 = 20\Delta t - \frac{1}{2} 10 \cdot \Delta t^2 \rightarrow 5\Delta t^2 - 20\Delta t + 15 = 0 \rightarrow$$

$$\Delta t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot 5 \cdot 15}}{2 \cdot 5}\ \mathrm{s} = \frac{20 \pm 10}{10}\ \mathrm{s} \rightarrow$$

$$t_3 - t_1 = 1s \ \rightarrow t_3 = 5s \ \ \text{ή} \ \ t_3 - t_1 = 3s \rightarrow \ t_3 = 7s$$

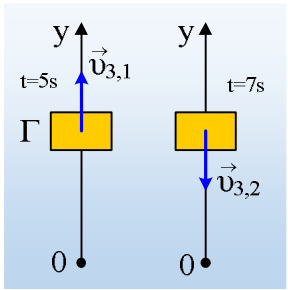
Με αντικατάσταση των παραπάνω χρονικών στιγμών στην εξίσωση (1a) βρίσκουμε:

Για t_3=5s:

$$\upsilon_{3,1} = \upsilon_1 - \mathrm{g}(\mathrm{t} - t_1) = 20\,{}^{m}/_{s} \ - 10(5-4)\,{}^{m}/_{s} = 10\,{}^{m}/_{s}$$

Ενώ για t_3=7s:

$$\upsilon_{3,2} = \upsilon_1 - \mathrm{g}(\mathrm{t} - t_1) = 20\,{}^{m}/_{s} \ - 10(7-4)\,{}^{m}/_{s} = -10\,{}^{m}/_{s}$$



Αξίζει να επισημάνουμε ότι το σώμα περνά από το σημείο Γ δύο φορές. Μια κατά την άνοδο τη στιγμή t_3=5s και μια κατά την πτώση του, την στιγμή t_3'=7s, έχοντας ταχύτητες ίδιου μέτρου.

dmargaris@gmail.com