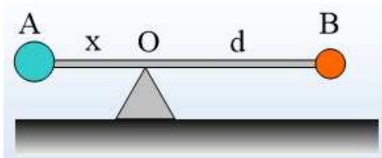
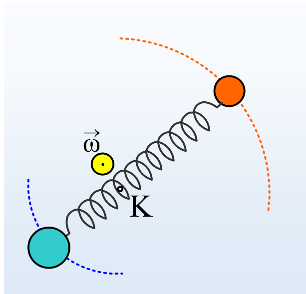
Το κ.μ. ενός συστήματος και η στροφορμή

Στα άκρα μιας αβαρούς ράβδου μήκους d, έχουν προσδεθεί δυο σφαίρες Α και Β με μάζες m_1=3kg και m_2=1kg, οι οποίες αντιμετωπίζονται ως υλικά σημεία αμελητέων διαστάσεων, δημιουργώντας ένα στερεό S. Στηρίζουμε τη ράβδο στο σημείο Ο, με αποτέλεσμα το στερεό να ισορροπεί με την ράβδο σε οριζόντια θέση, όπως στο σχήμα.



i) Να αποδείξετε ότι (ΑΟ=x=d/4. Ποιο σημείο είναι το κέντρο μάζας του στερεού S;

Αφαιρούμε τις δυο σφαίρες από την ράβδο και τις συνδέουμε στα άκρα ενός ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=100N/m και φυσικού μήκους l_0=88cm. Το σύστημα τοποθετείται σε ένα λείο οριζόντιο επίπεδο και τίθεται με κατάλληλο τρόπο σε περιστροφή, οπότε κάθε σφαίρα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση με σταθερή περίοδο Τ=π/2 s, γύρω από το κέντρο μάζας Κ του συστήματος των δύο σφαιρών, όπως φαίνεται στο σχήμα (σε κάτοψη).



ii) Να υπολογιστούν οι ακτίνες των δύο κυκλικών τροχιών, που διαγράφουν οι δυο σφαίρες.

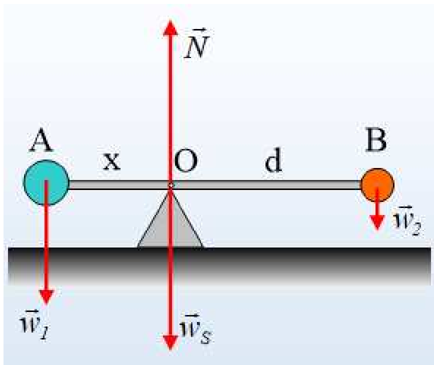
iii) Πόση ενέργεια απαιτήθηκε για να τεθεί το παραπάνω σύστημα σε περιστροφή;

iv) Να βρεθεί η ορμή του συστήματος των δύο σφαιρών.

v) Ποια η στροφορμή του συστήματος των δύο σφαιρών, ως προς το κοινό κέντρο Κ της κυκλικής τροχιάς, που διαγράφουν.

Απάντηση

i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο στερεό s κατά την ισορροπία (έχει σχεδιαστεί επιπλέον και το «ολικό βάρος» w_S, εκτός των επιμέρους βαρών των δύο σφαιρών). Από την συνθήκη ισορροπίας του στερεού, παίρνοντας τις ροπές ως προς το σημείο στήριξης Ο, έχουμε Στ=0, οπότε:



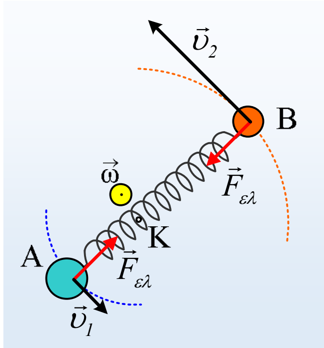
$$w_1 \cdot x - w_2 \cdot (d-x) = 0 \rightarrow m_1 g \cdot x - m_2 g \cdot (d-x)$$

$$3x = d - x \rightarrow x = \frac{d}{4}$$

Το κέντρο μάζας του στερεού S (στην περίπτωσή μας και κέντρο μάζας του συστήματος των δύο σφαιρών) είναι ένα σημείο από το οποίο διέρχεται το βάρος του στερεού. Αλλά, αν αντί να πάρουμε τα βάρη των δύο σφαιρών, πάρουμε το βάρος w_S του στερεού μας, τότε σε αυτό ασκούνται δύο δυνάμεις. Το βάρος και η δύναμη στήριξης Ν. Για να ισορροπεί όμως, θα πρέπει $Στ_ο$=0, οπότε αφού η Ν περνάει από το Ο, από το Ο περνά και το βάρος. Αν λοιπόν θεωρήσουμε αμελητέο το πάχος της αβαρούς ράβδου, τότε το σημείο στήριξης Ο και το κέντρο μάζας Κ του συστήματος των δύο σφαιρών συμπίπτουν.

ii) Με βάση την παραπάνω ανάλυση για το κέντρο μάζας, στην περίπτωση που οι δυο σφαίρες συνδέονται στα άκρα του ελατηρίου, το κέντρο μάζας Κ θα απέχει κατά ¼ l από την σφαίρα Α, ενώ το ελατήριο θα ασκεί δυνάμεις ίσου μέτρου:

$$F_{\varepsilon\lambda}=k\cdot\Delta l=k\cdot(l-l_0)$$



σε κάθε σφαίρα, όπως στο σχήμα. Εξάλλου η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του συστήματος, είναι ίση:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{\pi/2}\,rad/s=4\,rad/s$$

Η δύναμη του ελατηρίου, για κάθε σφαίρα, παίζει το ρόλο της κεντρομόλου, οπότε για την Α σφαίρα:

$$\Sigma F_1=m_1\omega^2R_1\xrightarrow{R_1=l/4}k\cdot(l-l_0)=m_1\omega^2\,l/4\xrightarrow{\alpha\nu\tau\iota\kappa}$$

$$100\cdot(l-0{,}88)=3\cdot4^2\cdot l/4\rightarrow 100l-88=12l\rightarrow$$

$$l=1m$$

Οπότε οι ακτίνες των δύο κυκλικών τροχιών είναι R_1= ¼ l=25cm και R_2= ¾ l=75cm.

iii) Γνωρίζοντας τις δυο ακτίνες, μπορούμε να υπολογίσουμε τώρα τις ταχύτητες των δύο σφαιρών:

$$\upsilon_1=\omega R_1=4\cdot0{,}25\,m/s=1\,m/s \ \text{ και}$$

$$\upsilon_2=\omega R_2=4\cdot0{,}75\,m/s=3\,m/s$$

Ενώ η ενέργεια που απαιτήθηκε για να τεθεί σε κίνηση το σύστημα, είναι ίση με την μηχανική ενέργεια που έχει το σύστημα των δύο σφαιρών και το ελατήριο, το οποίο έχει επιμηκυνθεί κατά $\Delta l=l-l_0=0{,}12m$.

$$E=K_1+K_2+U_{\varepsilon\lambda}=\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2+\frac{1}{2}m_2\upsilon_1^2+\frac{1}{2}k(\Delta l)^2\rightarrow$$

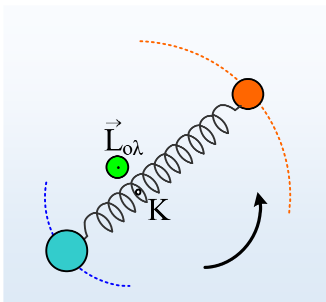
$$E=\frac{1}{2}3\cdot1^2J+\frac{1}{2}1\cdot3^2J+\frac{1}{2}100\cdot0{,}12^2J=6{,}72\,J$$

iv) Αφού προσέξουμε ότι οι δυο ταχύτητες έχουν αντίθετες κατευθύνσεις, θα έχουμε:

$$\vec{p}_{o\lambda}=\vec{p}_1+\vec{p}_2\rightarrow p_{o\lambda}=m_1\upsilon_1+m_2\upsilon_2$$

$$p_{o\lambda}=3\cdot1\,kgm/s+1\cdot(-3)\,kgm/s=0$$

v) Η στροφορμή του συστήματος των δύο σφαιρών, ως προς το κοινό κέντρο Κ των δύο κυκλικών τροχιών, είναι ίση με το διανυσματικό άθροισμα των επιμέρους στροφορμών, οπότε προκύπτει ένα διάνυσμα, κάθετο στο επίπεδο με φορά προς τον αναγνώστη, όπως στο σχήμα.



$$\vec{L}_{o\lambda}=\vec{L}_1+\vec{L}_2\rightarrow L_{o\lambda}=L_1+L_2$$

$$L_{o\lambda}=m_1\upsilon_1R_1+m_2\upsilon_2R_2\rightarrow$$

$$L_{o\lambda}=3\cdot1\cdot0{,}25kg\,m^2/s+1\cdot3\cdot0{,}75kg\,m^2/s=3kg\,m^2/s\,.$$

dmargaris@gmail.com