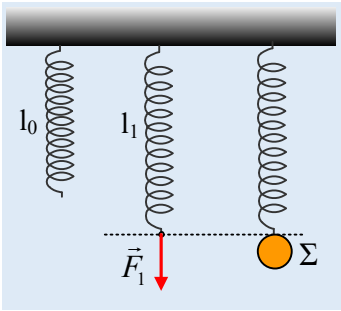
Το ελατήριο και οι δυνάμεις

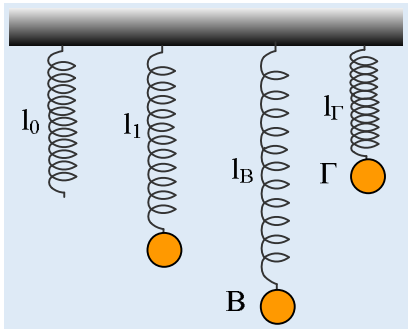


Ένα ιδανικό ελατήριο (απόλυτα ελαστικό με αμελητέο βάρος), κρέμεται από το ταβάνι, όπως στο σχήμα, έχοντας το φυσικό μήκος του l_0=20cm Ασκώντας με το χέρι μας στο κάτω άκρο του, μια κατακόρυφη δύναμη $\vec{F}_1$, μέτρου F_1=5N, το ελατήριο αποκτά μήκος l_1=25cm.

i) Γνωρίζοντας ότι για την παραμόρφωση του ελατηρίου ισχύει ο νόμος του Hooke F=k·Δl, να βρεθεί η σταθερά k του ελατηρίου.

ii) Αυξάνουμε το μέτρο της ασκούμενης δύναμης, οπότε το ελατήριο αποκτά μήκος 28cm. Ποιο το μέτρο της δύναμης $\vec{F}_2$ που ασκήσαμε;

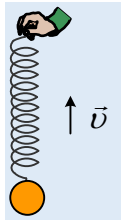
iii) Παύουμε να τραβάμε το ελατήριο και δένουμε στο άκρο του ένα σώμα Σ, το οποίο αφήνουμε να ηρεμήσει, οπότε βλέπουμε το ελατήριο να έχει ξανά μήκος l_1. Λαμβάνοντας υπόψη ότι αν το σώμα Σ ασκεί μια δύναμη F=k·Δl στο ελατήριο, τότε το ελατήριο ασκεί μια αντίθετη δύναμη, με το ίδιο μέτρο, την οποία ονομάζουμε δύναμη του ελατηρίου $|F_{ελ}|$=k·|Δl|, στο σώμα Σ, να υπολογιστεί το βάρος του σώματος Σ.



iv) Υποστηρίζεται ότι «ένα σώμα, όπως το σώμα Σ, μπορεί να ασκεί στο ελατήριο δύναμη ίση με το βάρος του». Για να δούμε αν η πρόταση αυτή είναι σωστή ή όχι, τραβάμε το σώμα προς τα κάτω και σε μια στιγμή το αφήνουμε να κινηθεί. Παίρνουμε το σώμα στις θέσεις Β και Γ, όπου τα μήκη του ελατηρίου είναι l_B=30cm και $l_Γ$=16cm.

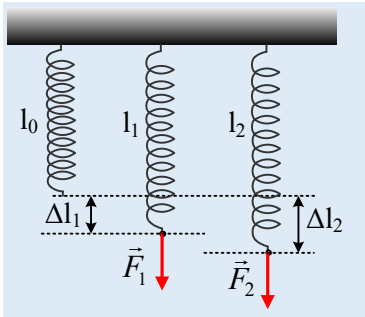
α) Να υπολογίσετε τις δυνάμεις που το σώμα ασκεί στο ελατήριο, στις θέσεις αυτές, σχεδιάζοντάς τις πάνω στο σχήμα.

β) Να σχεδιάσετε και τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ και να βρείτε την συνισταμένη τους, στις θέσεις Β και Γ.



v) Ελευθερώνουμε το ελατήριο και κρατώντας με το χέρι μας το πάνω άκρο του, δένουμε το σώμα Σ στο κάτω άκρο του. Να βρείτε το σταθερό μήκος του ελατηρίου, αν τραβάμε προς τα πάνω, με αποτέλεσμα το σώμα να κινείται κατακόρυφα με σταθερή ταχύτητα υ=0,4m/s.

Απάντηση:



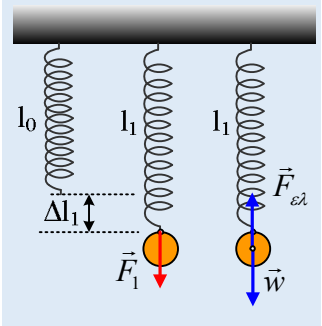
i) Ασκώντας στο κάτω άκρο του ελατηρίου την δύναμη F_1, προκαλείται επιμήκυνσή του ελατηρίου κατά $Δl_1=l_1-l_0$=0,25cm-0,2m=0,05m. Αλλά τότε από το νόμο του Hooke έχουμε:

$$F_1 = k \cdot \Delta l_1 \rightarrow k = \frac{F_1}{\Delta l_1} = \frac{5N}{0{,}05m} = 100\frac{N}{m}$$

ii) Εφαρμόζοντας ξανά τον νόμο του Hooke για το δεξιό σχήμα, όπου το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά $Δl_2=l_2-l_0$=0,28m=0,2m=0,08m, παίρνουμε

$$F_2 = k \cdot \Delta l_2 = 100\frac{N}{m} \cdot 0{,}08m = 8N$$

iii) Στο διπλανό σχήμα έχουν σημειωθεί (σε διπλανό διαφορετικό σχήμα) η δύναμη F_1, που ασκεί η σφαίρα και επιμηκύνει το ελατήριο και οι δυνάμεις που δέχεται η σφαίρα. Το βάρος $\vec{w}$ και η δύναμη $\vec{F}_{\varepsilon\lambda}$ από το ελατήριο.

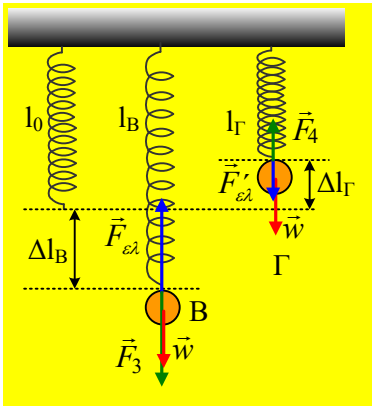


Αφού το ελατήριο έχει την ίδια επιμήκυνση Δl_1, θα δέχεται από την σφαίρα δύναμη ξανά με το ίδιο μέτρο $F_1=k\cdot\Delta l=5N$. Αλλά τότε με βάση τον 3ο νόμο του Νεύτωνα (δράση – αντίδραση) και το ελατήριο ασκεί στο σώμα Σ, μια δύναμη αντίθετης κατεύθυνσης (προς τα πάνω) του ίδιου μέτρου $|F_{\varepsilon\lambda}|=5N$.

Από την ισορροπία τώρα του σώματος Σ έχουμε:

$$\Sigma\vec{F} = 0 \rightarrow \ F_{\varepsilon\lambda} - w = 0 \rightarrow w = F_{\varepsilon\lambda} = 5N$$

iv) Στο διπλανό σχήμα, με κόκκινο χρώμα το βάρος του σώματος, με πράσινο χρώμα οι δυνάμεις F_3 και F_4 που το σώμα ασκεί στο ελατήριο και με μπλε, οι δυνάμεις που το ελατήριο ασκεί στο σώμα, στις δυο αναφερόμενες θέσεις.



α) Το ελατήριο στην θέση Β, έχει επιμηκυνθεί, συνεπώς δέχεται από το σώμα Σ μια κατακόρυφη δύναμη $\vec{F}_3$, με φορά προς τα κάτω μέτρου:

$$F_3 = k \cdot \Delta l_B = k(l_B - l_0) = 100 \cdot (0{,}3 - 0{,}2)N = 10N$$

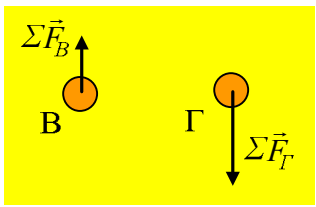
Αντίθετα στη θέση Γ το ελατήριο έχει συσπειρωθεί κατά $|l_\Gamma - l_0| = 0{,}04m$, οπότε δέχεται δύναμη $\vec{F}_4$, από το σώμα Σ, υπεύθυνη για την συσπείρωση αυτή, με φορά προς τα πάνω, μέτρου:

$$F_4 = k \cdot |\Delta l_\Gamma| = 100 \cdot 0{,}04N = 4N$$

Σημείωση: η μεταβολή στο μήκος του ελατηρίου στην θέση Γ, η l_Γ-l_0 είναι αρνητική, πράγμα που σημαίνει μείωση μήκους, συσπείρωση. Αξίζει να παρατηρήσετε επίσης ότι η δύναμη που μεταβάλλει το μήκος του ελατηρίου κατευθύνεται προς τα εκεί που μετακινείται το άκρο του ελατηρίου.

β) Το σώμα και στις δύο θέσεις δέχεται το βάρος με κατεύθυνση προς τα κάτω και μια δύναμη από το ελατήριο. Στην θέση Β αυτή είναι η αντίδραση της $\vec{F}_3$, με φορά προς τα πάνω και μέτρο $F_{\varepsilon\lambda}=10N$, ενώ στην θέση Γ την αντίδραση της δύναμης $\vec{F}_4$ με φορά προς τα κάτω και μέτρο $F_{\varepsilon\lambda}'=4N$.

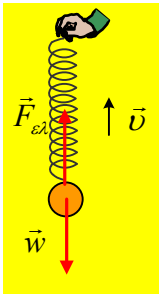
Οπότε στη θέση Β, η συνισταμένη δύναμη έχει φορά προς τα πάνω και μέτρο:



$$\Sigma F_B = F_{\varepsilon\lambda} - w = 10N - 5N = 5N$$

Ενώ αντίθετα στην θέση Γ, η συνισταμένη έχει φορά προς τα κάτω και μέτρο:

$$\Sigma F_{\Gamma} = F'_{\varepsilon\lambda} + w = 4N + 5N = 9N$$



v) Κατά την άνοδο του σώματος ασκούνται πάνω του δύο δυνάμεις, το βάρος και η δύναμη του ελατηρίου. Για να κινείται το Σ με σταθερή ταχύτητα θα πρέπει η συνισταμένη αυτών των δύο δυνάμεων να είναι μηδενική, με βάση τον 1ο νόμο του Νεύτωνα.
Οπότε αφού το βάρος έχει κατεύθυνση προς τα κάτω, η δύναμη από το ελατήριο θα έχει φορά προς τα πάνω, όπως στο προηγούμενο ερώτημα για την θέση Β και το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά Δl, οπότε θα έχουμε:

$$\Sigma\vec{F} = 0 \rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = w = 0 \rightarrow k \cdot \Delta l = w \rightarrow$$

$$\Delta l = \frac{w}{k} = \frac{5}{100} m = 0{,}05m \rightarrow$$

$$l - l_0 = 5cm \rightarrow l = 20cm + 5cm = 25cm$$

Σημείωση: Αξίζει να συγκρίνετε τα αποτελέσματα στα ερωτήματα iii) και v) όπου στο σώμα ασκούνται οι ίδιες δυνάμεις. Το σώμα **ισορροπεί** και στις δύο περιπτώσεις. Στην πρώτη περίπτωση το σώμα παραμένει ακίνητο, στην δεύτερη περίπτωση κινείται με σταθερή ταχύτητα!

dmargaris@gmail.com