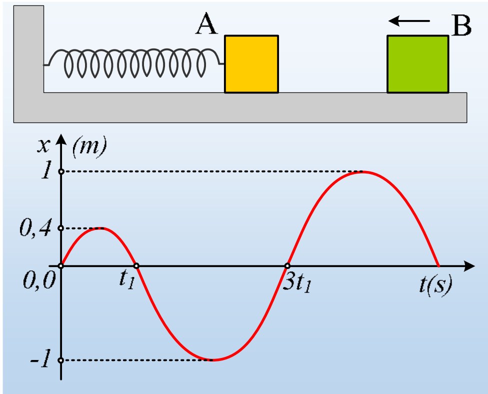
Μια κρούση μεταξύ δύο ταλαντώσεων



Σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένο στο άκρο ενός ιδανικού ελατηρίου, ταλαντώνεται ένα σώμα Α μάζας m_1=1kg, ενώ ένα δεύτερο σώμα Β κινείται με σταθερή ταχύτητα πλησιάζοντας προς το Α σώμα, όπως στο σχήμα. Λαμβάνοντας κάποια στιγμή ως αρχή μέτρησης των χρόνων και ορίζοντας την προς τα δεξιά κατεύθυνση ως θετική, χαράξαμε την γραφική παράσταση της απομάκρυνσης του Α σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο, παίρνοντας το διάγραμμα του διπλανού σχήματος, όπου την στιγμή $t_1 = {}^{\pi}/_{10}\, s$ τα δύο σώματα συγκρούσθηκαν κεντρικά. Αντλώντας πληροφορίες από το διάγραμμα, να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις:

i) Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί η παραπάνω κρούση είναι πλαστική;

ii) Να υπολογιστεί η σταθερά του ιδανικού ελατηρίου, με το οποίο συνδέεται το Α σώμα.

iii) Να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος Α ελάχιστα πριν την κρούση, καθώς και η κοινή ταχύτητα των σωμάτων μετά την κρούση.

iv) Αφού υπολογιστεί η αρχική απόσταση (για t=0) των δύο σωμάτων, να γίνει η γραφική παράσταση της ταχύτητας του σώματος Β σε συνάρτηση με το χρόνο, για $t \geq 0$.

Δίνεται π^2=10.

Απάντηση:

i) Με βάση το διάγραμμα που μας δίνεται, πριν την κρούση, το σώμα Α ταλαντώνεται με περίοδο ίση με $T_1 = 2t_1 = {}^{\pi}/_{5}\, s$, ενώ μετά την κρούση η περίοδος γίνεται ίση με $T_2 = 2(3t_1 - t_1) = {}^{2\pi}/_{5}\, s$, δηλαδή διπλασιάζεται. Για να αλλάξει η περίοδος θα πρέπει να άλλαξε η μάζα του σώματος που ταλαντώνεται, πράγμα που μπορεί να συμβεί αν η κρούση είναι πλαστική.

ii) Από την εξίσωση της περιόδου της ταλάντωσης για το σώμα Α παίρνουμε:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}} \to k = \frac{4\pi^2 m_1}{T_1^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 1}{\left({}^{\pi}/_{5}\right)^2}\, {}^{N}/_{m} = 100\, {}^{N}/_{m}$$

iii) Η θέση της κρούσης, είναι η θέση ισορροπίας (κοινή για πριν και μετά την κρούση, αφού είναι η θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου), ενώ το σώμα κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση, έχοντας μέγιστη κατά μέτρο ταχύτητα, με αλγεβρική τιμή:

$$\upsilon_1 = -\omega_1 A_1 = -\frac{2\pi}{T_1} A_1 = -\frac{2\pi}{{}^{\pi}/_{5}} A_1 = -10 \cdot 0{,}4\, {}^{m}/_{s} = -4\, {}^{m}/_{s}$$

Αλλά και η κοινή ταχύτητα του συσσωματώματος, αμέσως μετά την κρούση, είναι επίσης η μέγιστη κατά μέτρο ταχύτητα για την ταλάντωση μετά την κρούση, με αρνητική επίσης αλγεβρική τιμή, αφού το συσσωμάτωμα κινείται προς αρνητικές απομακρύνσεις.

$$\upsilon_\kappa = -\omega_2 A_2 = -\frac{2\pi}{T_2}A_2 = -\frac{2\pi}{2\pi/5}A_2 = -5\cdot 1\,{}^{m}/_{s} = -5\,{}^{m}/_{s}$$

iv) Εφαρμόζουμε για την κρούση μεταξύ των δύο σωμάτων την αρχή διατήρησης της ορμής:

$$\vec{p}_{\pi\rho} = \vec{p}_{\mu\varepsilon\tau} \;\rightarrow\; m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = (m_1 + m_2)\upsilon_\kappa \quad (1)$$

Αλλά από την περίοδο μετά την κρούση βρίσκουμε:

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1+m_2}{k}} \rightarrow m_1 + m_2 = \frac{T_2^2\cdot k}{4\pi^2} = \frac{\left(2\pi/5\right)^2\cdot 100}{4\pi^2}kg = 4kg \;\rightarrow$$

$$m_2 = 3kg$$

Οπότε από την (1) βρίσκουμε:

$$\upsilon_2 = \frac{(m_1+m_2)\upsilon_\kappa - m_1\upsilon_1}{m_2} = \frac{4\cdot(-5) - 1\cdot(-4)}{3}\,{}^{m}/_{s} = -\frac{16}{3}\,{}^{m}/_{s}$$

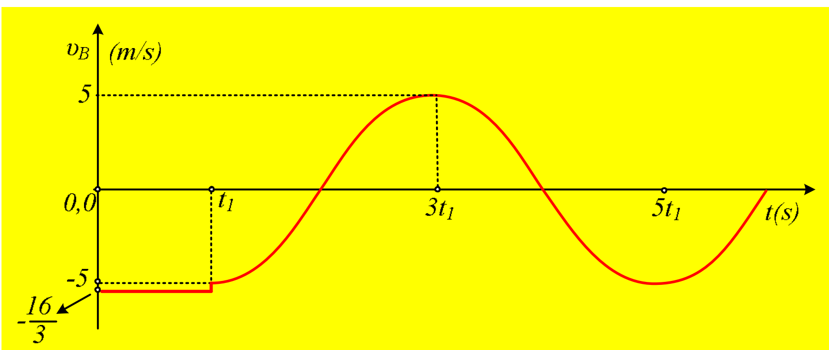
Τη στιγμή t=0 το Α σώμα βρίσκεται στην θέση ισορροπίας, στην ίδια θέση που βρίσκεται και τη στιγμή της κρούση, οπότε η απόστασή του από το σώμα Β, θα είναι ίση:

$$d = |\upsilon_2|t_1 = \frac{16}{3}\cdot\frac{\pi}{10}m = \frac{8\pi}{15}m \approx 1{,}68m$$

Εξάλλου το συσσωμάτωμα ξεκινά την ταλάντωσή του από την θέση ισορροπίας του, κινούμενο προς την αρνητική κατεύθυνση με εξίσωση απομάκρυνσης $x = A_2\eta\mu(\omega_2 t' + \pi)$, όπου t΄=t-t$_1$, με αποτέλεσμα η ταχύτητά (συνεπώς και η ταχύτητα του σώματος Β), δίνεται από την εξίσωση:

$$\upsilon = |\upsilon_\kappa|\sigma\upsilon\nu(\omega_2 t' + \pi) = -5\cdot\sigma\upsilon\nu(5t')$$

Με αποτέλεσμα η γραφική παράσταση της ταχύτητας του Β σώματος, σε συνάρτηση με το χρόνο, να παίρνει την μορφή του παρακάτω σχήματος.



dmargaris@gmail.com