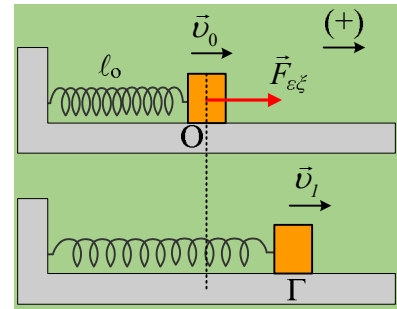


## Η δύναμη και η ισχύς της σε μια εξαναγκασμένη ταλάντωση.

Ένα σώμα μάζας  $m$ , εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση, πάνω σε ένα λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένο στο άκρο ενός ιδανικού ελατηρίου σταθεράς  $k=25\text{ N/m}$  (S.I.), με την επίδραση μιας περιοδικής εξωτερικής δύναμης  $F_{εξ}$ , ενώ πάνω του ασκείται δύναμη απόσβεσης της μορφής  $F_{απ}=-bv$ . Μετά το πέρας των μεταβατικών φαινομένων, λαμβάνοντας κάποια στιγμή ως αρχή μέτρησης των χρόνων  $t=0$ , η εξίσωση της απομάκρυνσης ικανοποιεί την εξίσωση  $x=A\cdot\eta\mu(6t)$  (S.I.), με θετική κατεύθυνση προς τα δεξιά.



- i) Κάποια στιγμή  $t_1$  το σώμα περνά από την θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου (και θέση  $x=0$ ), κινούμενο προς την θετική κατεύθυνση, όπως στο σχήμα. Τη στιγμή αυτή:
  - α) Η εξωτερική δύναμη είναι μηδενική.
  - β) Η εξωτερική δύναμη έχει θετική κατεύθυνση, όπως στο σχήμα και μέτρο ανάλογο της σταθεράς απόσβεσης  $b$ .
  - γ) Η ισχύς της εξωτερικής δύναμης είναι ανάλογη του τετραγώνου της γωνιακής ιδιοσυχνότητας ταλάντωσης
- ii) Τη στιγμή που το σώμα βρίσκεται στη θέση  $x=-A$ , η εξωτερική δύναμη μηδενίζεται.
- iii) Μια άλλη στιγμή  $t_2$  το σώμα περνά από την θέση  $\Gamma$ , έχοντας απομάκρυνση  $x_1$ , κινούμενο προς τα δεξιά, όπως στο σχήμα. Τη στιγμή αυτή η δύναμη απόσβεσης έχει μέτρο ίσο με το 4% του μέτρου της δύναμης του ελατηρίου. Στη θέση αυτή η εξωτερική δύναμη προσφέρει ενέργεια στο σώμα με ρυθμό ανάλογο της ταχύτητας  $v_1$ , στην θέση αυτή.

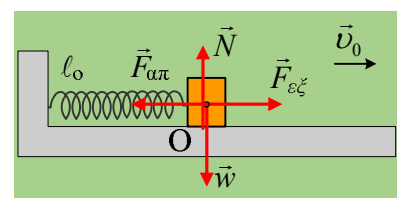
Να χαρακτηρίσετε τις παραπάνω προτάσεις ως σωστές ή λανθασμένες δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

### Απάντηση:

Η θέση  $O$  ( $x=0$ ) είναι θέση ισορροπίας, γύρω από την οποία ταλαντώνεται το σώμα. Αφού η απομάκρυνση δίνεται από την εξίσωση  $x=A\cdot\eta\mu(6t)$ , εξίσωση γνωστή από την ΑΑΤ, θα ισχύουν επίσης οι γνωστές εξισώσεις για ταχύτητα και επιτάχυνση:

$$v = \omega A \cdot \sigma\upsilon\nu(6t) \quad \text{και} \quad a = -\omega^2 A \cdot \eta\mu(6t) = -\omega^2 x \quad (\text{μονάδες στο S.I.)}$$

- i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα στην θέση ισορροπίας  $O$ . Αφού το σώμα κινείται προς τα δεξιά, η δύναμη απόσβεσης  $F_{απ}=-b\cdot v$ , έχει φορά προς τα αριστερά, οπότε αφού  $\Sigma F=0$ , η εξωτερική δύναμη έχει φορά προς τα δεξιά, όπως στο σχήμα και μέτρο:



$$F_{εξ,0} = |F_{απ}| = bv_0$$

Ενώ η ισχύς της (ο ρυθμός με τον οποίο μεταφέρει ενέργεια στο σώμα, είναι ίση:

$$P_o = |F_{εξ}| \cdot |v_o| \cdot \sin 0^\circ = b v_o v_o = b \cdot v_o^2 = b \cdot \omega^2 A^2 = 36 b A^2$$

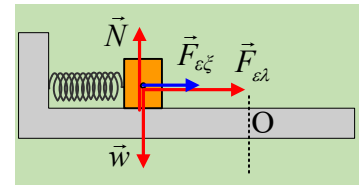
Η τελευταία εξίσωση μας λέει ότι η ισχύς είναι ανάλογη της γωνιακής συχνότητας (rad/s) και όχι της γωνιακής ιδιοσυχνότητας, η οποία έχει τιμή:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{25m}{m}} = 5 \text{ rad/s}$$

Με βάση τα παραπάνω έχουμε:

$$\alpha) \mathbf{\Lambda}, \quad \beta) \mathbf{\Sigma}, \quad \gamma) \mathbf{\Lambda}.$$

- ii) Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα στη θέση  $x=-A$ , όπου θεωρήσαμε ότι η εξωτερική δύναμη κατευθύνεται προς την θέση ισορροπίας. Στη θέση αυτή η δύναμη απόσβεσης μηδενίζεται αφού  $v=0$ , ενώ για την εξωτερική δύναμη, αυτό δεν είναι δεδομένο και... γνωστό! Εφαρμόζουμε για το σώμα το 2<sup>ο</sup> νόμο του Νεύτωνα:

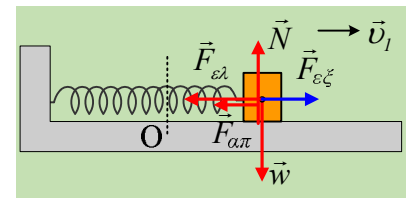


$$\Sigma \vec{F} = m \vec{a} \rightarrow F_{ελ} + F_{εξ} = m a \rightarrow -kx + F_{εξ} = m(-\omega^2 x) \rightarrow$$

$$F_{εξ} = kx + m(-\omega^2 x) = -25m \cdot A + 36m \cdot A = 11m \cdot A$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι η εξωτερική δύναμη δεν μηδενίζεται, έχει μέτρο  $11m \cdot A$  και κατευθύνεται προς την θέση ισορροπίας, προς τα δεξιά. Η πρόταση είναι λανθασμένη.

- iii) Στη θέση Γ, ασκείται στο σώμα δύναμη απόσβεσης, αντίθετης της ταχύτητας, οπότε θεωρούμε ότι η εξωτερική δύναμη, θέλοντας να εξουδετερώσει την δράση της, έχει κατεύθυνση προς τα δεξιά, όπως στο σχήμα. Ξανά από το 2<sup>ο</sup> νόμο του Νεύτωνα, παίρνουμε:



$$\Sigma \vec{F} = m \vec{a}_1 \rightarrow F_{ελ} + F_{εξ} + F_{απ} = m a_1 \rightarrow -kx + F_{εξ} - 0,02kx = m(-\omega^2 x) \rightarrow$$

$$F_{εξ} = 1,04kx + m(-\omega^2 x) = 26mx - 36mx = -10mx < 0$$

Δηλαδή στη θέση αυτή, η εξωτερική δύναμη έχει αντίθετη κατεύθυνση από αυτήν που υποθέσαμε και κατευθύνεται προς τα αριστερά.

Αλλά τότε η δύναμη έχει αντίθετη κατεύθυνση από την ταχύτητα και για την ισχύς της θα ισχύει:

$$P_{εξ} = |F_{εξ}| \cdot |v_1| \cdot \sin 180^\circ < 0$$

Πράγμα που σημαίνει ότι η εξωτερική δύναμη δεν προσφέρει ενέργεια, αλλά αφαιρεί ενέργεια από το σώμα στην θέση αυτή. Η πρόταση είναι λανθασμένη.

[dmargaris@gmail.com](mailto:dmargaris@gmail.com)