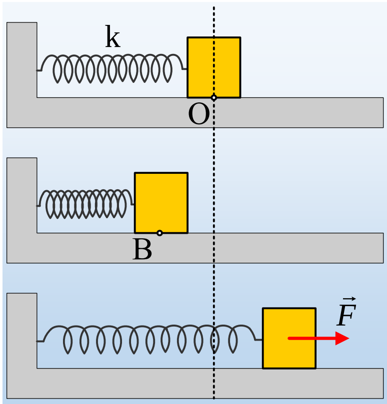
Με την άσκηση δύναμης, μια δεύτερη ταλάντωση



Ένα σώμα μάζας 1kg ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένο στο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου, σταθεράς k=40N/m, στην θέση Ο. Εκτρέπουμε το σώμα προς τα αριστερά κατά d_1=0,2m, φέρνοντάς το στην θέση Β και σε μια στιγμή t_o=0 το αφήνουμε να ταλαντωθεί. Την στιγμή t_1=0,5s, ασκείται στο σώμα μια σταθερή συντηρητική οριζόντια δύναμη μέτρου F=12N, με φορά προς τα δεξιά, όπως στο σχήμα. Θεωρώντας την προς τα αριστερά κατεύθυνση ως θετική:

i) Να αποδείξετε ότι για όσο χρόνο ασκείται στο σώμα η δύναμη F, αυτό εκτελεί ΑΑΤ, βρίσκοντας την θέση ισορροπίας και το πλάτος της ταλάντωσης αυτής.

ii) Αφού βρείτε την χρονική στιγμή που το σώμα θα αρχίσει, για πρώτη φορά, να κινείται προς τα αριστερά, να εξετάσετε αν θα επιστρέψει στην αρχική θέση Β, από την οποία ξεκίνησε.

iii) Να βρείτε την συνάρτηση *x=f(t)* της θέσης του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο, αν η αρχή του άξονα είναι η αρχική θέση ισορροπίας Ο του σώματος.

iv) Να γίνει η γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης μέχρι την στιγμή t_2=1,5s.

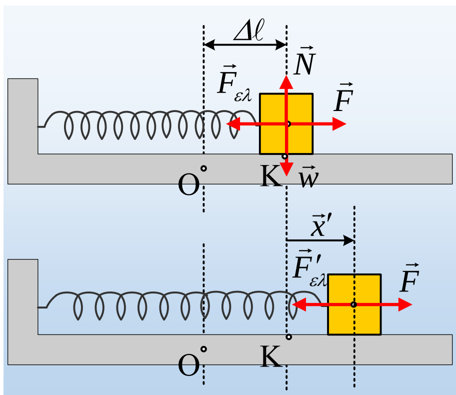
Δίνεται π^2=10.

Απάντηση:

i) Αρχικά το σώμα εκτελεί μια ΑΑΤ με πλάτος A_1=0,2m, γύρω από την θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου Ο, η οποία είναι και θέση ισορροπίας, αφού ξεκινά με μηδενική ταχύτητα, οπότε η θέση Β είναι θέση πλάτους. Η ταλάντωση αυτή έχει περίοδο:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{40}}s = 1s$$

Αλλά τότε η στιγμή t_1 που θα αρχίσει να ασκείται στο σώμα η δύναμη F, είναι ίση με το μισό της περιόδου και το σώμα βρίσκεται στην δεξιά ακραία θέση της ταλάντωσής του με απομάκρυνση x_1=-0,2m (έχει καθοριστεί η προς τα αριστερά κατεύθυνση ως θετική).



Έστω Κ η νέα θέση ισορροπίας, μετά την άσκηση της δύναμης F. Τότε ΣF_y=0 και ΣF_x=0, οπότε:

$$|F_{\varepsilon\lambda}| = |F| \to k\Delta\ell = |F| \to \Delta\ell = \frac{|F|}{k} = \frac{12N}{40\,N/m} = 0{,}3m$$

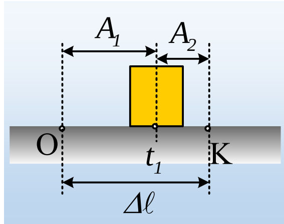
Η νέα θέση ισορροπίας Κ, βρίσκεται δηλαδή δεξιά της θέσης Ο, όπου το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά 0,3m.

Ας πάρουμε τώρα το σώμα σε μια τυχαία θέση με απομάκρυνση x΄ από την θέση ισορροπίας Κ. Παίρνοντας ξανά τις δυνάμεις στην οριζόντια διεύθυνση, θα έχουμε:

$$\Sigma F = F - F'_{\varepsilon\lambda} = F - k\left(\Delta\ell + x'\right) = F - k\Delta\ell - kx' = -kx'$$

Συνεπώς το σώμα θα εκτελέσει μια νέα ΑΑΤ, γύρω από την θέση Κ, με την ίδια σταθερά επαναφοράς D=k, συνεπώς και με την ίδια περίοδο $T_2=T_1=1s$.

Η ταλάντωση αυτή ξεκινά την στιγμή t_1, όπου το σώμα βρίσκεται σε θέση πλάτους (της πρώτης ταλάντωσης), οπότε η θέση αυτή θα είναι η ακραία αριστερή θέση και για την νέα ταλάντωση, η οποία θα έχει πλάτος:



$$A_2 = \Delta\ell - A_1 = 0{,}3m - 0{,}2m = 0{,}1m$$

ii) Αφού η νέα ταλάντωση έχει την ίδια περίοδο με την πρώτη, το σώμα θα χρειαστεί ξανά χρονικό διάστημα $\Delta t_2= ½\ T_2=0{,}5s$, για να μεταβεί από την αριστερή ακραία θέση της ταλάντωσής του $x'_1=+0{,}1m$ στην δεξιά $x_2'=-0{,}1m$. Αλλά τότε το σώμα θα σταματήσει την προς τα δεξιά του κίνηση και θα αρχίσει να κινείται προς τα αριστερά την χρονική στιγμή $t_2=t_1+\Delta t_2=1s$.

Κατά την διάρκεια της 2ης αυτής ταλάντωσης, το σώμα κινούμενο με πλάτος 0,1m θα φτάσει μέχρι την αριστερή θέση πλάτους, τη θέση που ήταν και την στιγμή t_1 (0,2m δεξιά της θέσης Ο) και προφανώς δεν θα επιστρέψει στην θέση Β!

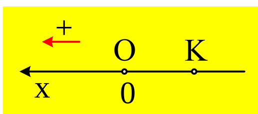
iii) Η απομάκρυνση του σώματος στην διάρκεια της πρώτης ταλάντωσης δίνεται από την εξίσωση:

$$x_1 = A_1\eta\mu(\omega t + \varphi_o)$$

Όπου $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{40}{1}}rad/s = 2\pi\ rad/s$, ενώ το σώμα ξεκινά την ταλάντωσή του από την θετική ακραία θέση της ταλάντωσής του, έχοντας αρχική φάση $\varphi_o=\pi/2$. Έτσι η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$x_1 = 0{,}2\cdot\eta\mu\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right)\ (1)\ \ \mu o\nu\acute{\alpha}\delta\varepsilon\varsigma\ \sigma\tau o\ S.I.\ \ \gamma\iota\alpha\ t \le 0{,}5s$$

Η παραπάνω «απομάκρυνση» είναι ταυτόχρονα και η θέση του σώματος πάνω στον άξονα x, ο οποίος έχει αρχή (x=0) την θέση Ο και θετική φορά προς τα αριστερά.



Με την ίδια λογική και η δεύτερη ταλάντωση, ξεκινά από την θετική ακραία θέση, έχοντας επίσης αρχική φάση $\varphi_{o,2}= \pi/2$ και την ίδια γωνιακή συχνότητα $\omega=2\pi$ rad/s και η εξίσωση της απομάκρυνσης (γύρω από την θέση Κ με $x_K=-0{,}3m$), θα έχει την μορφή:

$$x'_2 = A_2\eta\mu(\omega t + \varphi_{o2}) = 0{,}1\cdot\eta\mu\left(2\pi t' + \frac{\pi}{2}\right)$$

Όπου $t'=t-t_1 = t- 0{,}5s$, ενώ για την θέση x_2 στον προηγούμενο ορισθέντα άξονα x, θα έχουμε:

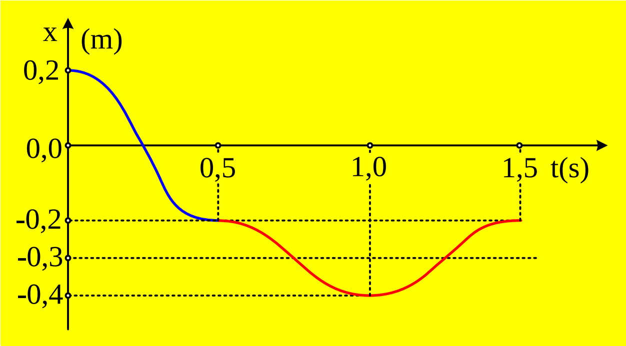
$$x_2 = x_K + x'_2 = -0{,}3 + 0{,}1\cdot\eta\mu\left(2\pi(t-0{,}5) + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow$$

$$x_2 = -0{,}3 + 0{,}1 \cdot \eta\mu\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ (2) μονάδες στο S.I. και } t>0{,}5s$$

iv) Λαμβάνοντας υπόψη τις παραπάνω συναρτήσεις (1) και (2), μπορούμε να γράψουμε για την συνάρτηση της θέσης του σώματος $x=f(t)$:

$$x = \begin{cases} 0{,}2 \cdot \eta\mu\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) & \text{για } t \leq 0{,}5s \\ -0{,}3 + 0{,}1 \cdot \eta\mu\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right) & \text{με } t>0{,}5s \end{cases}$$

Οπότε στο χρονικό διάστημα 0-1,5s (χρόνος 1,5 περιόδου) η ζητούμενη γραφική παράσταση έχει την μορφή:



Όπου το μπλε τμήμα της καμπύλης αντιστοιχεί στην πρώτη ταλάντωση (μισή περίοδος) και το κόκκινο στην δεύτερη (για μια περίοδο).

dmargaris@gmail.com