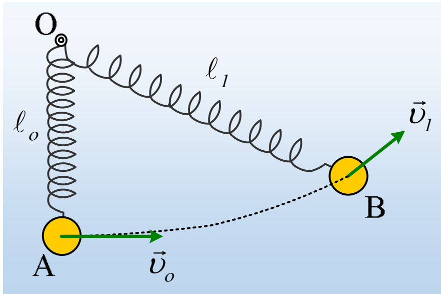
Καμπυλόγραμμη και όχι κυκλική κίνηση

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο, στην θέση Α, ηρεμεί μια σφαίρα μάζας 4kg, την οποία θεωρούμε υλικό σημείο, δεμένη στο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=50N/m, με φυσικό μήκος l_o=3m, το άλλο άκρο του οποίου έχει δεθεί σε σημείο Ο του επιπέδου. Σε μια στιγμή η σφαίρα δέχεται ένα στιγμιαίο κτύπημα αποκτώντας ταχύτητα $υ_o$=10m/s, κάθετη στον άξονα του ελατηρίου, όπως στο σχήμα (σε κάτοψη). Η σφαίρα ακολουθώντας μια καμπύλη τροχιά, μετά από λίγο περνά από την θέση Β, όπου το μήκος του ελατηρίου είναι l_1=5m.



i) Να υπολογισθεί το μέτρο της ταχύτητας $υ_1$ της σφαίρας στο σημείο Β.

ii) Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει η ταχύτητα $υ_1$ με τον άξονα του ελατηρίου.

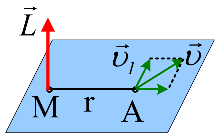
iii) Να υπολογισθεί η επιτάχυνση της σφαίρας στις θέσεις Α και Β.

iv) Να υπολογισθεί η ακτίνα R ενός κύκλου και να προσδιορισθεί το κέντρο του Κ, ο οποίος μπορεί να προσεγγίσει την τροχιά της σφαίρας στη θέση Β (η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς στο Β).

v) Να εξετάσετε τον ρόλο της επιτάχυνσης στη θέση Β, όπως την ερμηνεύει ένας παρατηρητής στο Ο και ένας άλλος παρατηρητής στο κέντρο Κ της κυκλικής τροχιάς, του παραπάνω κύκλου.

vi) Να υπολογισθεί η στροφορμή της σφαίρας και ο ρυθμός μεταβολής της, ως προς το Κ, τη στιγμή που η σφαίρα περνά από την θέση Β.

Δίνεται ότι ένα υλικό σημείο το οποίο κινείται με ταχύτητα υ, ευρισκόμενο σε σημείο Α, που απέχει r από το τυχαίο σημείο Μ παρουσιάζει ως προς το Μ, στροφορμή μέτρου $L=mυ_1r$, όπου $υ_1$ η συνιστώσα της ταχύτητας η κάθετη στην απόσταση r, με κατεύθυνση όπως στο σχήμα.



Απάντηση:

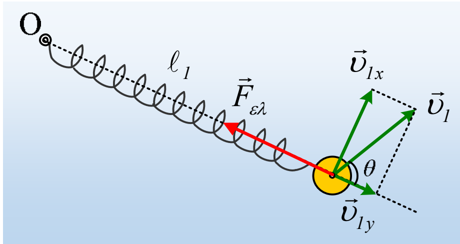
i) Αν εξαιρέσουμε βάρος και κάθετη αντίδραση του επιπέδου, οι οποίες είναι κατακόρυφες δυνάμεις με μηδενική συνισταμένη, η μόνη οριζόντια δύναμη που θα καθορίσει την κίνηση της σφαίρας είναι η δύναμη του ελατηρίου, μια συντηρητική δύναμη, οπότε η μηχανική ενέργεια του συστήματος σφαίρα-ελατήριο παραμένει σταθερή, Έτσι εφαρμόζοντας την ΑΔΜΕ παίρνουμε:

$$K_A + U_A = K_B + U_B$$

$$\frac{1}{2}mυ_o^2 + 0 = \frac{1}{2}mυ_1^2 + \frac{1}{2}k(Δl)^2 \rightarrow$$

$$υ_1 = \sqrt{υ_o^2 - \frac{k}{m}(Δl)^2} = \sqrt{10^2 - \frac{50}{4} \cdot 2^2}\, {}^{m}/_{s} = \sqrt{50}\, {}^{m}/_{s} \approx 7\, {}^{m}/_{s}$$

ii) Αφού η δύναμη του ελατηρίου σε όλη τη διάρκεια της κίνησης της σφαίρας κατευθύνεται προς το άκρο Ο



του ελατηρίου, δεν εμφανίζει ροπή ως προς το Ο. Οπότε η στροφορμή της σφαίρας, ως προς το Ο, παραμένει σταθερή:

$$\vec{L}_{OA} = \vec{L}_{OB} \ \rightarrow m\upsilon_o l_o = m\upsilon_{1x} l_1 \ (1)$$

Όπου υ_{1x} η συνιστώσα της ταχύτητας, η κάθετη στον άξονα του ελατηρίου. Λύνοντας την (1) ως προς υ_{1x} παίρνουμε:

$$\upsilon_{1x} = \upsilon_o \frac{l_o}{l_1} = 10 \cdot \frac{3}{5} {}^{m}/_{s} = 6 \, {}^{m}/_{s}$$

Οπότε για την γωνία θ που σχηματίζει η ταχύτητα υ_1 με τον άξονα του ελατηρίου, έχουμε:

$$\eta\mu\theta = \frac{\upsilon_{1x}}{\upsilon_1} = \frac{6}{7}$$

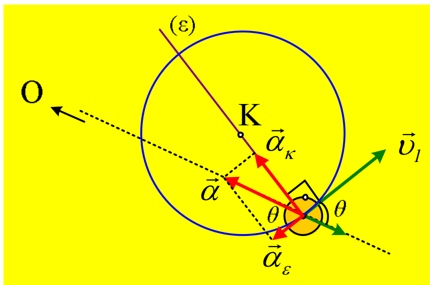
Σημείωση: Η γνώση του ημθ, ουσιαστικά σημαίνει και γνώση της γωνίας, αρκεί με ένα κομπιουτεράκι να βρούμε και την γωνία σε μοίρες…

iii) Στη θέση Α το ελατήριο έχει το φυσικό μήκος του, αφού αρχικά η σφαίρα ηρεμεί, συνεπώς και η επιτάχυνση, μόλις δεχτεί το κτύπημα και αποκτήσει την ταχύτητα υ_o , θα είναι μηδενική.

Για την θέση Β, η σφαίρα έχει επιτάχυνση στην διεύθυνση της δύναμης του ελατηρίου, προς το σημείο Ο, με μέτρο:

$$F = m\alpha \ \rightarrow \alpha = \frac{k\Delta l}{m} = \frac{50 \cdot 2}{4} {}^{m}/_{s^2} = 25 \, {}^{m}/_{s^2}.$$

iv) Αν φέρουμε την ευθεία (ε) κάθετη στην ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$, πάνω της θα βρίσκεται το κέντρο ενός κύκλου, κέντρου Κ, ο οποίος μπορεί να προσεγγίσει την καμπύλη τροχιά στην θέση Β. Αν αναλύσουμε την επιτάχυνση που υπολογίσαμε παραπάνω σε δυο συνιστώσες, όπως στο σχήμα, τότε η συνιστώσα η κάθετη στην ταχύτητα, είναι η γνωστή μας κεντρομόλος επιτάχυνση, οπότε:

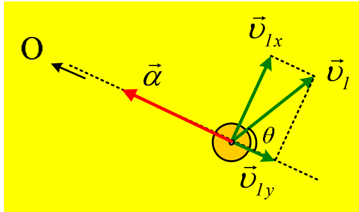


$$\alpha_\kappa = \frac{\upsilon_1^2}{R} \rightarrow \alpha\eta\mu\theta = \frac{\upsilon_1^2}{R} \rightarrow$$

$$R = \frac{\upsilon_1^2}{\alpha\eta\mu\theta} = \frac{50}{25 \cdot \frac{6}{7}} m = \frac{7}{3} m$$

Αν θελήσουμε να προσδιορίσουμε την ευθεία (ε) με βάση τον άξονα του ελατηρίου, η γωνία μεταξύ τους είναι φ=90°-θ.

v) Για έναν παρατηρητή στο άκρο Ο του ελατηρίου, η επιτάχυνση α της σφαίρας μπορεί να αναλυθεί σε δυο συνιστώσες, της ίδιας διεύθυνσης, αφού:



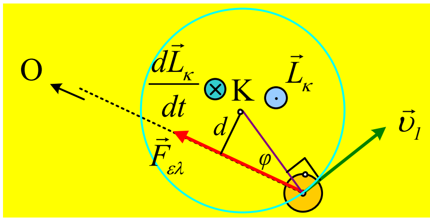
α) Η μια συνιστώσα είναι κάθετη στην ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{1x}$, οπότε μεταβάλει την κατεύθυνσή της παίζοντας τον ρόλο της κεντρομόλου $\alpha_{\kappa 1} = \frac{\upsilon_{1x}^2}{R_1}$.

Προσοχή: Η ακτίνα $R_1 \neq R$, δεν είναι γνωστή και δεν είναι ίση με το μήκος του ελατηρίου l_1.

β) Αφετέρου η δεύτερη συνιστώσα έχει αντίθετη κατεύθυνση από την συνιστώσα $\vec{\upsilon}_{1y}$, της οποίας μεταβάλλει (μειώνει) το μέτρο. Βλέπει δηλαδή να διατηρεί το μέτρο σταθερό η συνιστώσα $\vec{\upsilon}_{1x}$, ενώ μειώνεται το μέτρο της συνιστώσας $\vec{\upsilon}_{1y}$.

Με άλλα λόγια η σφαίρα κινείται κατά μήκος του άξονα του ελατηρίου ή αν προτιμάτε στην διεύθυνση της ακτίνας R_1, εκτελώντας μια ευθύγραμμη επιβραδυνόμενη κίνηση, ταυτόχρονα με την κυκλική κίνηση με γραμμική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{1x}$.

Αντίθετα ο παρατηρητής στο κέντρο Κ της κυκλικής τροχιάς του ερωτήματος iv), βλέπει κεντρομόλο επιτάχυνση με μέτρο $\alpha_\kappa = \alpha \cdot \eta\mu\theta$, υπεύθυνη για την αλλαγή στην διεύθυνση της συνολικής ταχύτητας $\vec{\upsilon}_1$, αλλά και επιτρόχια επιτάχυνση $\alpha_y = \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$, αντίθετης κατεύθυνσης, η οποία μειώνει το μέτρο της ταχύτητας αυτής.



vi) Η στροφορμή της σφαίρας ως προς το Κ, είναι κάθετη στο επίπεδο της σελίδας με φορά προς τον αναγνώστη και μέτρο:

$$L_\kappa = m\upsilon_1 R = 4 \cdot 7 \cdot \frac{7}{3}\frac{kgm^2}{s} = 65.4\frac{kgm^2}{s}.$$

Ενώ ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της στροφορμής είναι επίσης κάθετος στο επίπεδο του σχήματος, αλλά με φορά προς τα μέσα και μέτρο, ίσο με το μέτρο της ροπής ως προς το Κ, της δύναμης του ελατηρίου:

$$\frac{dL_\kappa}{dt} = \Sigma\tau = F_{\varepsilon\lambda} \cdot x = k\Delta l \cdot R\eta\mu\varphi = k\Delta l \cdot R\sigma\upsilon\nu\theta \rightarrow$$

Όπου $\sigma\upsilon\nu\theta = \sqrt{1 - \eta\mu^2\theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{6}{7}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{7}$, οπότε:

$$\frac{dL_\kappa}{dt} = 50 \cdot 2 \cdot \frac{7}{3} \cdot \frac{\sqrt{13}}{7} \quad \frac{kgm^2}{s^2} = 33{,}3\sqrt{13}\ \frac{kgm^2}{s^2}.$$

dmargaris@gmail.com