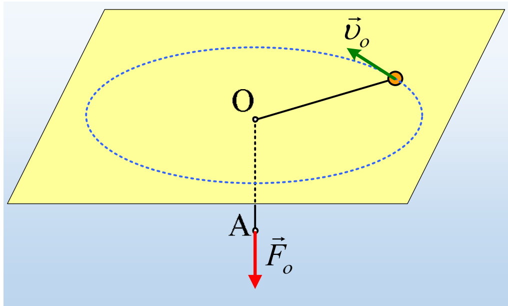
Κάτι ακόμη σε ένα γνωστό πρόβλημα



Μια μικρή σφαίρα μάζας m=2kg, την οποία θεωρούμε υλικό σημείο, περιστρέφεται πάνω σε λείο οριζόντιο τραπέζι, δεμένη στο ένα άκρο αβαρούς νήματος μήκους l=1,5m, με ταχύτητα σταθερού μέτρου υ_o=3m/s. Η παραπάνω περιστροφή επιτυγχάνεται, αφού το νήμα περνά από μια τρύπα Ο, στην επιφάνεια του τραπεζιού και στο άλλο του άκρο Α, ασκούμε μια κατακόρυφη δύναμη F, μέτρου F_o =22,5N, όπως στο σχήμα. Κάποια στιγμή t=0, αυξάνουμε το μέτρο της δύναμης F, (καθιστώντας την μεταβλητή), οπότε μετά από λίγο τη στιγμή t_1, το άκρο Α του νήματος έχει κατέβει κατά h=0,2m έχοντας ταχύτητα υ_A=0,1m/s, ενώ η δύναμη έχει μέτρο F_1=60N.

i) Ποιο το αρχικό μήκος του κατακόρυφου τμήματος (ΟΑ) του νήματος;

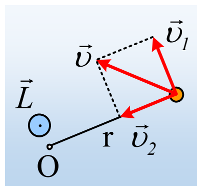
ii) Να υπολογιστεί η στροφορμή και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας, ως προς το σημείο Ο, την στιγμή t_1.

iii) Να υπολογιστεί το έργο της μεταβλητής δύναμης F, μέχρι τη στιγμή t_1.

iv) Για την στιγμή t_1 να βρεθούν ακόμη:

α) Η κινητική ενέργεια και ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της σφαίρας.

β) Η επιτάχυνση του άκρου Α του νήματος.



Δίνεται ότι η στροφορμή ενός υλικού σημείου το οποίο κινείται με ταχύτητα υ στο επίπεδο της σελίδας, ως προς ένα σημείο Ο του επιπέδου, είναι κάθετη στο επίπεδο, όπως στο σχήμα και έχει μέτρο $L=m\upsilon_1 r$, όπου υ_1 η συνιστώσα της ταχύτητας η κάθετη στην απόσταση r.

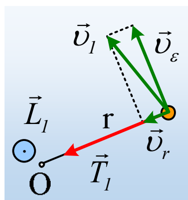
Απάντηση:

Στο πρόβλημά μας το βάρος και η κάθετη αντίδραση του επιπέδου που ασκείται στο σφαιρίδιο, έχουν μηδενική συνισταμένη, αφού το σφαιρίδιο ισορροπεί στην κατακόρυφη διεύθυνση και δεν επηρεάζουν την κίνηση του σφαιριδίου.

i) Μέσω του νήματος, μεταφέρεται η δύναμη F στο σφαιρίδιο, ως τάση του νήματος T=22,5N. Η δύναμη αυτή παίζει το ρόλο της κεντρομόλου στην ομαλή κυκλική κίνηση που πραγματοποιεί το σφαιρίδιο Τότε:

$$T = m\frac{\upsilon_o^2}{R} \;\rightarrow R = m\frac{\upsilon_o^2}{T} = 2\cdot\frac{3^2}{22{,}5}m = 0{,}8m$$

Αλλά τότε το κατακόρυφο τμήμα του νήματος είναι ίσο με (ΟΑ)=l-R=1,5m=0,8m=0,7m.



ii) Στην διάρκεια από t_0 έως t_1 η μόνη δύναμη που καθορίζει την κίνηση του σφαιριδίου είναι η τάση του νήματος, η οποία κατευθύνεται προς το σημείο Ο. Άρα δεν εμφανίζει ροπή ως προς Ο με αποτέλεσμα η στροφορμή του σφαιριδίου ως προς Ο να παραμένει σταθερή. Έτσι θα έχουμε:

$$\vec{L}_o = \vec{L}_1 \to L_1 = m\upsilon_o R = 2 \cdot 3 \cdot 0{,}8 \, {}^{kgm^2}/_{s} = 4{,}8 \, {}^{kgm^2}/_{s}$$

Ενώ η ροπή της τάσης, ως προς το Ο είναι μηδενική, με αποτέλεσμα:

$$\frac{dL_O}{dt} = \tau_{T_1} = 0$$

iii) Λαμβάνοντας υπόψη το δεδομένο που μας δόθηκε, την στιγμή t_1 η στροφορμή του σφαιριδίου οφείλεται στην συνιστώσα ταχύτητας υ_ε την κάθετη στην ταχύτητα. Με βάση την παραπάνω τιμή της στροφορμής της σφαίρας, βρίσκουμε:

$$L_1 = m\upsilon_\varepsilon R_1 \xrightarrow{R_1 = R - h}$$

$$\upsilon_\varepsilon = \frac{L_1}{mR_1} = \frac{4{,}8}{2 \cdot 0{,}6} \, {}^{m}/_{s} = 4 \, {}^{m}/_{s}$$

Ενώ η ακτινική ταχύτητα υ_r είναι ίσου μέτρου με την ταχύτητα με την οποία κατέρχεται το άκρο Α του νήματος, $\upsilon_r = \upsilon_A = 0{,}1 m/s$.

Έτσι εφαρμόζοντας το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για το σφαιρίδιο μεταξύ των θέσεων που βρίσκεται τις στιγμές t_o και t_1, παίρνουμε:

$$K_1 - K_o = W_F \to W_F = \frac{1}{2} m\upsilon_1^2 - \frac{1}{2} m\upsilon_o^2 \to$$

$$W_F = \frac{1}{2} m\left((\upsilon_\varepsilon^2 + \upsilon_A^2) - \upsilon_o^2\right) = \frac{1}{2} 2\left((4^2 + 0{,}1^2) - 3^2\right) J = 7{,}01 J$$

iv) Η κινητική ενέργεια υπολογίστηκε έμμεσα παραπάνω…

α) Ας την ξανά…βρούμε:

$$K_1 = \frac{1}{2} m(\upsilon_\varepsilon^2 + \upsilon_A^2) = \frac{1}{2} \, 2(4^2 + 0{,}1^2) J = 16{,}01 J$$

Ενώ ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας, είναι ίσος με τον ρυθμό με τον οποίο η δύναμη T_1 παρέχει ενέργεια στην σφαίρα, συνεπώς ίσος με την ισχύ της τάσης, η οποία συνδέεται με την συνιστώσα της ταχύτητας $\upsilon_r = \upsilon_A$:

$$\frac{dK}{dt} = T_1 \cdot \upsilon_r = F_1 \cdot \upsilon_A = 60 \cdot 0{,}1 \, {}^{J}/_{s} = 6 \, {}^{J}/_{s}$$

β) Εφαρμόζοντας τον θεμελιώδη νόμο της δυναμικής τη στιγμή t_1, βρίσκουμε ότι η σφαίρα έχει επιτάχυνση με κατεύθυνση προς το σημείο Ο, με μέτρο:

$$T_1 = ma \to a = \frac{T_1}{m} = \frac{60}{2} \, {}^{m}/_{s^2} = 30 \, {}^{m}/_{s^2}.$$

Θεωρώντας την κίνηση της σφαίρας σύνθετη, μια (στιγμιαία) κυκλική με ακτίνα R_1 και στιγμιαία γραμμική ταχύτητα υ_ε και μια ευθύγραμμη πάνω στην ακτίνα του παραπάνω κύκλου με κατεύθυνση προς το Ο. Τότε η παραπάνω επιτάχυνση θα είναι ίση με το αλγεβρικό άθροισμα των δύο παραπάνω επιταχύνσεων, μιας κεντρομόλου και μιας για την ευθύγραμμη κίνηση στην διεύθυνση της ακτίνας:

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_\kappa + \vec{\alpha}_r \rightarrow a = a_\kappa + a_r \text{ (1)}$$

Για την κεντρομόλο επιτάχυνση έχουμε:

$$\alpha_\kappa = \frac{\upsilon_\varepsilon^2}{R_1} = \frac{4^2}{0{,}6}\,{}^m/_{s^2} = \frac{80}{3}\,{}^m/_{s^2} = 26{,}7\,{}^m/_{s^2}$$

Οπότε από την παραπάνω σχέση (1) παίρνουμε:

$$a_r = \alpha - a_\kappa = 30\,{}^m/_{s^2} - 26{,}7\,{}^m/_{s^2} = 3{,}3\,{}^m/_{s^2}$$

Αυτή είναι η επιτάχυνση της σφαίρας, η οποία συνδέεται με αλλαγή στο μέτρο της ταχύτητάς της, αλλά και η επιτάχυνση του άκρου του νήματος. Κατά συνέπεια το ίδιο μέτρο επιτάχυνσης θα έχει και κάθε σημείο του νήματος, άρα και η κατακόρυφη επιτάχυνση με την οποία επιταχύνεται προς τα κάτω το άκρο Α του νήματος, στο οποίο ασκείται η δύναμη F.

$$a_A = 3{,}3\,{}^m/_{s^2}$$

dmargaris@gmail.com