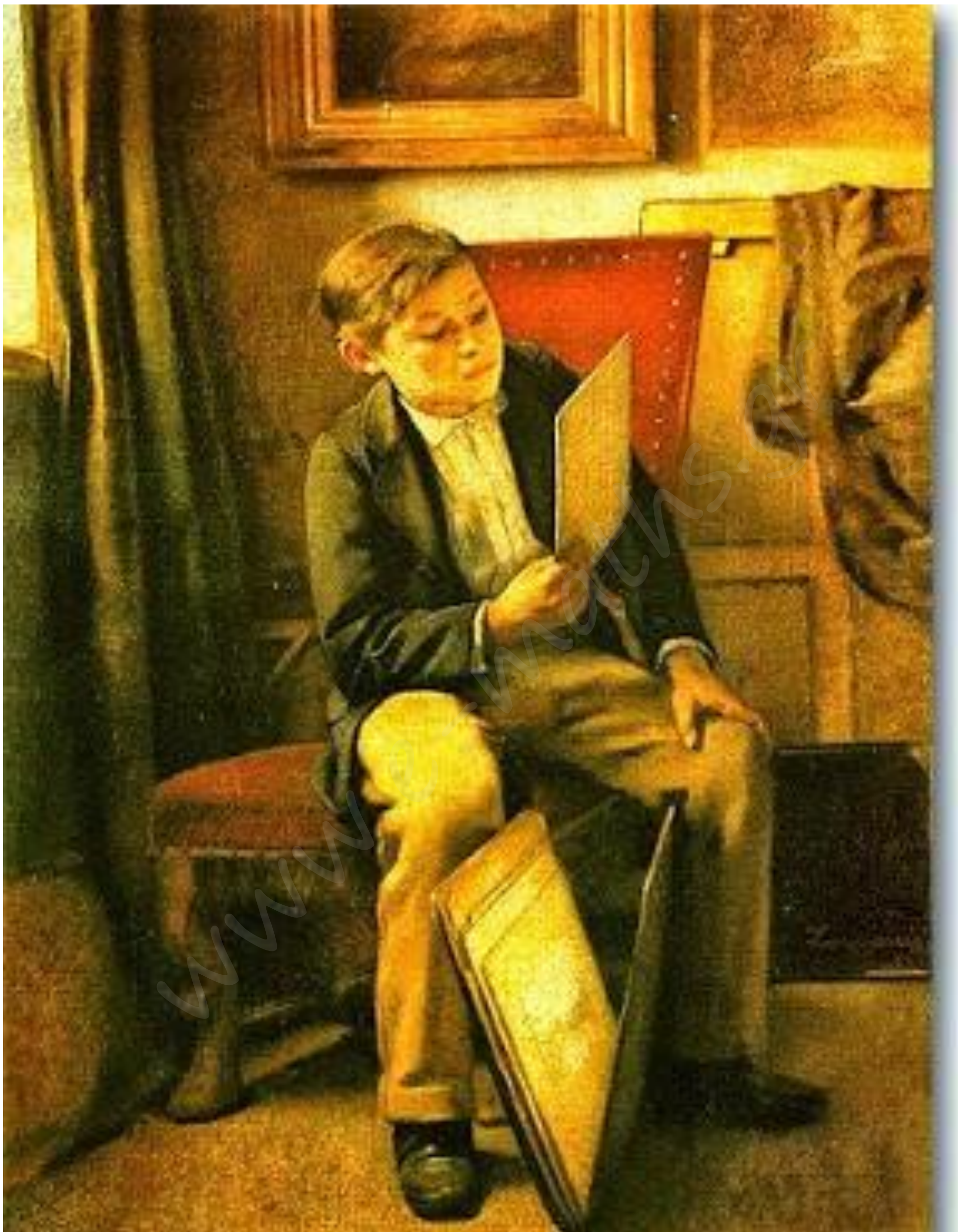
2ο Γυμνάσιο Κερατσινίου



A. 1. 2

1. **Τι ονομάζεται αλγεβρική παράσταση;**

♦ Ονομάζεται αλγεβρική παράσταση κάθε έκφραση που συνδυάζει πράξεις μεταξύ αριθμών και μεταβλητών.

2. **Τι ονομάζεται αριθμητική τιμή αλγεβρικής παράστασης;**

♦ Ονομάζεται αριθμητική τιμή αλγεβρικής παράστασης, ο αριθμός που θα προκύψει αν αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές με αριθμούς και εκτελέσουμε τις πράξεις.

3. **Πότε μια αλγεβρική παράσταση ονομάζεται ακέραια;**

Μια αλγεβρική παράσταση ονομάζεται **ακέραια**, όταν μεταξύ των μεταβλητών της σημειώνονται μόνο οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και οι εκθέτες των μεταβλητών της είναι φυσικοί αριθμοί.

4. **Τι ονομάζεται μονώνυμο και ποια τα μέρη από τα οποία αποτελείται;**

♦ Ονομάζεται μονώνυμο μια αλγεβρική παράσταση, στην οποία σημειώνεται μόνο η πράξη του πολλαπλασιασμού μεταξύ αριθμού και μιας ή περισσοτέρων μεταβλητών.

♦ Σε ένα μονώνυμο, ο αριθμητικός παράγοντας που γράφεται πρώτος ονομάζεται συντελεστής του μονωνύμου, ενώ το γινόμενο όλων των μεταβλητών ονομάζεται κύριο μέρος του μονωνύμου.

5. **Ποια μονώνυμα ονομάζονται όμοια;**

♦ Ονομάζονται όμοια δύο ή περισσότερα μονώνυμα που έχουν το ίδιο κύριο μέρος.

6. **Ποια μονώνυμα ονομάζονται ίσα και ποια αντίθετα;**

♦ Ονομάζονται ίσα δύο μονώνυμα που έχουν τον ίδιο συντελεστή και το ίδιο κύριο μέρος.

♦ Ονομάζονται αντίθετα δύο μονώνυμα που έχουν αντίθετο συντελεστή και το ίδιο κύριο μέρος.

7. **Τι ονομάζεται βαθμός μονωνύμου ως προς μία μεταβλητή του;**

♦ Ονομάζεται βαθμός μονωνύμου ως προς μία μεταβλητή του ο εκθέτης της μεταβλητής αυτής.

8. Τι ονομάζουμε σταθερό και τι μηδενικό μονώνυμο και ποιος ο βαθμός τους;

♦ Ονομάζουμε σταθερό μονωνύμο κάθε αριθμό και μηδενικό μονώνυμο τον αριθμό 0.

♦ Το μηδενικό μονώνυμο δεν έχει βαθμό ενώ όλα τα άλλα σταθερά μονώνυμα είναι μηδενικού βαθμού.

9. Πως ορίζεται το άθροισμα ομοίων μονωνύμων;

♦ Το άθροισμα ομοίων μονωνύμων είναι ένα μονώνυμο όμοιο με αυτά που έχει συντελεστή το άθροισμα των συντελεστών τους.

10. Τι ονομάζεται αναγωγή ομοίων όρων;

♦ Ονομάζεται αναγωγή ομοίων όρων η πρόσθεση ομοίων μονωνύμων.

11. Πως ορίζεται το γινόμενο μονωνύμων;

Το γινόμενο μονωνύμων είναι ένα μονώνυμο με συντελεστή το γινόμενο των συντελεστών τους και κύριο μέρος γινόμενο όλων των μεταβλητών τους με εκθέτη κάθε μεταβλητής το **άθροισμα** των **εκθετών** της.

Α. 1. 3

12. Τι ονομάζεται πολυώνυμο;

♦ Ονομάζεται πολυώνυμο ένα άθροισμα μονωνύμων που δεν είναι όμοια.

13. Τι ονομάζεται βαθμός ενός πολυωνύμου ως προς μία μεταβλητή του;

♦ Ονομάζεται βαθμός ενός πολυωνύμου ως προς μία μεταβλητή του ο μεγαλύτερος από τους βαθμούς των όρων του ως προς την μεταβλητή αυτή.

14. Τι ονομάζουμε σταθερό και τι μηδενικό πολυώνυμο και ποιος ο βαθμός τους;

♦ Ονομάζουμε σταθερό πολυώνυμο κάθε αριθμό και μηδενικό πολυώνυμο τον αριθμό 0.

♦ Το μηδενικό πολυώνυμο δεν έχει βαθμό ενώ όλα τα άλλα σταθερά πολυώνυμα είναι μηδενικού βαθμού.

Α. 1. 4

15. Πως πολλαπλασιάζουμε:

α. Μονώνυμο με πολυώνυμο ;

β. Πολυώνυμο με πολυώνυμο ;

Για να πολλαπλασιάσουμε:

α. Μονώνυμο με πολυώνυμο πολλαπλασιάζουμε το μονώνυμο με κάθε όρο του πολυωνύμου και στη συνέχεια κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.

β. Πολυώνυμο με πολυώνυμο πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο του ενός πολυωνύμου με κάθε όρο του άλλου και στη συνέχεια κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.

Α. 1. 5

16. Τι ονομάζεται ταυτότητα;

- Ονομάζεται ταυτότητα κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και επαληθεύεται για κάθε τιμή των μεταβλητών αυτών.

17. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

i. $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

ii. $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

iii. $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$

iv. $(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$

v. $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2-\beta^2$

Απόδειξη

i. $(\alpha+\beta)^2=(\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\beta)=\alpha^2+\underline{\underline{\alpha\cdot\beta}}+\underline{\underline{\beta\cdot\alpha}}+\beta^2=\alpha^2+2\alpha\cdot\beta+\beta^2$

ii. $(\alpha-\beta)^2=(\alpha-\beta)\cdot(\alpha-\beta)=\alpha^2-\underline{\underline{\alpha\cdot\beta}}-\underline{\underline{\beta\cdot\alpha}}+\beta^2=\alpha^2-2\alpha\cdot\beta+\beta^2$

iii. $(\alpha+\beta)^3=(\alpha+\beta)^2\cdot(\alpha+\beta)=(\alpha^2+2\alpha\cdot\beta+\beta^2)\cdot(\alpha+\beta)=$

$=\alpha^3+\underline{2\alpha^2\cdot\beta}+\underline{\underline{\alpha\cdot\beta^2}}+\underline{\beta\cdot\alpha^2}+\underline{\underline{2\alpha\cdot\beta^2}}+\beta^3=\alpha^3+3\alpha^2\cdot\beta+3\alpha\cdot\beta^2+\beta^3$

iv. $(\alpha-\beta)^3=(\alpha-\beta)^2\cdot(\alpha-\beta)=(\alpha^2-2\alpha\cdot\beta+\beta^2)\cdot(\alpha-\beta)=$

$=\alpha^3-2\underline{\alpha^2\cdot\beta}+\alpha\underline{\underline{\cdot\beta^2}}-\beta\cdot\underline{\alpha^2}+2\underline{\underline{\alpha\cdot\beta^2}}-\beta^3=\alpha^3-3\alpha^2\cdot\beta+3\alpha\cdot\beta^2-\beta^3$

v. $(\alpha-\beta)\cdot(\alpha+\beta)=\alpha^2-\alpha\cdot\beta+\beta\cdot\alpha-\beta^2$

A. 1. 6

18. Τι ονομάζεται παραγοντοποίηση;

- Ονομάζεται παραγοντοποίηση ενός πολυωνύμου ή γενικότερα μιας αλγεβρικής παράστασης η διαδικασία μετατροπής της παράστασης σε γινόμενο.

19. Ποιες είναι οι χαρακτηριστικές περιπτώσεις παραγοντοποίησης;

<u>Κοινός παράγοντας</u>

Όταν όλοι οι όροι μιας παράστασης έχουν κοινό παράγοντα, τότε η παράσταση μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων σύμφωνα με την επιμεριστική ιδιότητα.

$$\boxed{\alpha\beta + \alpha\gamma - \alpha\delta = \alpha(\beta + \gamma - \delta)}$$

<u>Ομαδοποίηση</u>

Όταν όλοι οι όροι του πολυωνύμου δεν έχουν κοινό παράγοντα, τους χωρίζουμε σε ομάδες έτσι ώστε:

$$\boxed{\begin{gathered}\alpha\beta + \alpha\gamma - \delta\beta - \delta\gamma = \\ \alpha(\beta + \gamma) - \delta(\beta + \gamma) = \\ (\beta + \gamma)(\alpha - \delta)\end{gathered}}$$

- Κάθε ομάδα που δημιουργούμε να έχει κοινό παράγοντα,
- Οι παραστάσεις που μένουν μετά την εξαγωγή του κοινού παράγοντα να είναι ίδιες.

<u>Διαφορά τετραγώνων</u>

Η μέθοδος αυτή παραγοντοποίησης στηρίζεται στην ταυτότητα $\boldsymbol{\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)}$, στην οποία αν εναλλάξουμε τα μέλη μετατρέπουμε μια διαφορά δύο **τελείων τετραγώνων** σε γινόμενο.

$$\boxed{\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)}$$

<u>Ανάπτυγμα τετραγώνου</u>

Αν το πολυώνυμο είναι τριώνυμο και έχει ή μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$\boldsymbol{\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \text{ ή } \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2,}$$

τότε θα γίνει αντίστοιχα

$$\boldsymbol{(\alpha + \beta)^2 \quad \text{ή} \quad (\alpha - \beta)^2,}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 \\ \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2\end{gathered}}$$

που είναι γινόμενα παραγόντων αφού :

$\boldsymbol{(\alpha + \beta)^2 = (\alpha + \beta)(\alpha + \beta)}$ **και** $\boldsymbol{(\alpha - \beta)^2 = (\alpha - \beta)(\alpha - \beta)}$

Παραγοντοποιήση τριωνύμου της μορφής $x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$

Αν το πολυώνυμο είναι τριώνυμο και έχει τη μορφή $x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$ έχουμε:

$\mathbf{x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta =}$

$\underline{\mathbf{x^2}} + \underline{\mathbf{x\,\alpha}} + \underline{\mathbf{x\,\beta}} + \underline{\mathbf{\alpha\beta}} =$ (Ομαδοποίηση)

$\mathbf{x(x + \alpha) + \beta(x + \alpha) =}$ (Κοινός παράγοντας)

$\mathbf{(x + \alpha)(x + \beta)}$

$$\boxed{x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = (x + \alpha)\cdot(x + \beta)}$$

Α. 1. 8

20. Τι ονομάζεται Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.) και τι Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.) δύο ή περισσοτέρων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων;

Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.) δύο ή περισσοτέρων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ονομάζεται, το γινόμενο των κοινών και μη κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός το με- γαλύτερο από τους εκθέτες του.

Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.) δύο ή περισσοτέρων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ονομάζεται, το γι- νόμενο των κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός το μικρότερο από τους εκθέτες του.

Α. 1. 9

21. Πότε μια αλγεβρική παράσταση ονομάζεται ρητή;

Μια αλγεβρική παράσταση ονομάζεται ρητή όταν είναι κλάσμα με όρους πολυώνυμα.

22. Πότε μια αλγεβρική παράσταση ορίζεται;

Μια αλγεβρική παράσταση ορίζεται για όλες τις τιμές των μεταβλητών που περιέχει <u>εκτός απ’ αυτές που μηδενίζουν τον παρανομαστή</u>, αφού όπως γνωρίζου- με δεν ορίζεται κλάσμα με παρονομαστή μηδέν.

23. Πότε μια ρητή αλγεβρική παράσταση μπορεί να απλοποιηθεί;

Όπως μια αριθμητική παράσταση, έτσι και μια ρητή παράσταση, μπορεί να απλοποιηθεί, αν ο αριθμητής και ο παρονομαστής της είναι γινόμενα και έχουν κοινό παράγοντα.

A. 1. 10

24. Πως κάνουμε πράξεις με ρητές αλγεβρικές παραστάσεις;

Για να κάνουμε πράξεις με ρητές αλγεβρικές παραστάσεις ακολουθούμε τους κανόνες που ισχύουν για τις πράξεις των κλασμάτων.

ηλαδή:

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\beta}=\frac{\alpha+\gamma}{\beta} \quad \text{και} \quad \frac{\alpha}{\beta}-\frac{\gamma}{\beta}=\frac{\alpha-\gamma}{\beta}$$

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\delta+\beta\gamma}{\beta\delta} \quad \text{και} \quad \frac{\alpha}{\beta}-\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\beta\delta} \quad \beta\delta \neq 0$$

$$\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\cdot\gamma}{\beta\cdot\delta} \quad \text{και} \quad \frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\delta}{\gamma}=\frac{\alpha\cdot\delta}{\beta\cdot\gamma} \quad \beta\gamma\delta \neq 0$$

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}}=\frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\delta}{\gamma}=\frac{\alpha\cdot\delta}{\beta\cdot\gamma} \quad \beta\gamma\delta \neq 0$$

Κεφάλαιο 2ο - Εξισώσεις Ανισώσεις

Α. 2. 1

25. Τι ονομάζεται εξίσωση 1ου βαθμού με έναν άγνωστο;

- Ονομάζεται εξίσωση 1ου βαθμού με έναν άγνωστο κάθε ισότητα της μορφής $\alpha x + \beta = 0$ με $\alpha \neq 0$.
- Ο α λέγεται συντελεστής του αγνώστου και ο β σταθερός (ή γνωστός) όρος.
- Ρίζα της εξίσωσης ονομάζεται ο αριθμός που αν αντικαταστήσει τον x στην εξίσωση προκύπτει ισότητα που αληθεύει.
- Επίλυση μιας εξίσωσης πρώτου βαθμού λέγεται η διαδικασία εκείνη με την οποία βρίσκουμε τη λύση της.

26. Πότε η εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$ έχει μία λύση πότε είναι αδύνατη και πότε αόριστη;

- Αν **α ▪ 0**, η εξίσωση $\boldsymbol{\alpha x + \beta = 0}$ έχει **μοναδική λύση** την $\boldsymbol{x = -\beta/\alpha}$
- Αν $\boldsymbol{\alpha = 0}$, και **β ▪ 0** η εξίσωση $\boldsymbol{\alpha x + \beta = 0}$ γράφεται $\boldsymbol{0 \cdot x = -\beta}$ και δεν έχει λύση

  (αδύνατη),
- Αν $\boldsymbol{\alpha = 0}$, και $\boldsymbol{\beta = 0}$, η εξίσωση $\boldsymbol{\alpha x} + \beta = \boldsymbol{0}$ γράφεται $\boldsymbol{0 \cdot x = 0}$ οπότε κάθε αριθμός

  είναι λύση της **(ταυτότητα ή αόριστη)**.

Α. 2. 2

27. Τι ονομάζεται εξίσωση2ου βαθμού, με έναν άγνωστο ;

- Ονομάζεται εξίσωση δευτέρου βαθμού με έναν άγνωστο κάθε ισότητα της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με α, β, γ πραγματικούς αριθμούς και $\alpha \neq 0$.
- Οι αριθμοί α και β ονομάζονται συντελεστές του δευτεροβαθμίου και πρωτοβαθμίου όρου αντίστοιχα και ο αριθμός γ σταθερός όρος.
- Επίλυση μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού λέγεται η διαδικασία εκείνη με την οποία βρίσκουμε τις τιμές του x που την επαληθεύουν.

28. Πως λύνουμε εξίσωςη της μορφής;

α. $\boldsymbol{\alpha x^2 + \beta x = 0}$ **με** $\boldsymbol{\alpha \neq 0}$

β. $\boldsymbol{\alpha x^2 + \gamma = 0}$ **με** $\boldsymbol{\alpha \neq 0}$

Αρχικά θυμόμαστε ότι: **Αν** $\boldsymbol{\alpha \cdot \beta = 0}$ **τότε** $\boldsymbol{\alpha = 0}$ **ή** $\boldsymbol{\beta = 0}$

α. Για να λύσουμε την εξίσωση $x^2 = 3x$, εργαζόμαστε ως εξής:

$x^2 = 3x$

$x^2 - 3x = 0$

$x(x - 3) = 0$

$x = 0$ ή $x - 3 = 0$, επομένως $x = 0$ ή $x = 3$

β. Για να λύσουμε την εξίσωση $x^2 - 9 = 0$, εργαζόμαστε ως εξής:

<u>1^{ος} τρόπος</u>	<u>2^{ος} τρόπος</u>
$x^2 - 9 = 0$	$x^2 - 9 = 0$
$x^2 - 3^2 = 0$	$x^2 = 9$
$(x - 3)(x + 3) = 0$	$x = \sqrt{9}$ ή $x = -\sqrt{9}$
$x - 3 = 0$ ή $x + 3 = 0$	$x = 3$ ή $x = -3$
$x = 3$ ή $x = -3$	Όταν α είναι θετικός, η εξίσωση
Άρα η εξίσωση έχει δύο	$x^2 = \alpha$ έχει δύο λύσεις τις
λύσεις, τις $x = 3$ και $x = -3$	$x = \sqrt{\alpha}$ και $x = -\sqrt{\alpha}$

Αν όμως α αρνητικός τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

29. Πότε μία εξίσωση δευτέρου βαθμού:

α. έχει δύο άνισες ρίζες;

β. έχει μια διπλή ρίζα ;

γ. δεν έχει ρίζες;

Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με α, β, γ πραγματικούς αριθμούς, $\alpha \neq 0$ και διακρίνουσα $\boldsymbol{\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma}$:

α. έχει δύο ρίζες άνισες που δίνονται από τον τύπο $x = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$, όταν $\boldsymbol{\Delta > 0}$

β. έχει δύο ρίζες ίσες που δίνονται από τον τύπο $x = \dfrac{-\beta}{2\alpha}$, όταν $\boldsymbol{\Delta = 0}$

γ. δεν έχει ρίζες, όταν $\boldsymbol{\Delta < 0}$

30. Πως παραγοντοποιείται το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ όταν η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ έχει λύσεις τις ρ_1, ρ_2;

- Αν ρ_1, ρ_2 είναι λύσεις της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ παραγοντοποιείται σύμφωνα με τον τύπο:

$$\boxed{\boldsymbol{\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha \cdot (x - \rho_1) \cdot (x - \rho_2)}}$$

Α. 2. 5

31. Πως συγκρίνουμε (διατάσουμε) δύο πραγματικούς αριθμούς;

Αν οι α και β είναι δύο πραγματικοί αριθμοί τότε:

- Λέμε ότι ο α είναι μεγαλύτερος του β και το συμβολίζουμε $\alpha > \beta$, όταν $\alpha - \beta > 0$.
- Λέμε ότι ο α είναι μικρότερος του β και το συμβολίζουμε $\alpha < \beta$, όταν $\alpha - \beta < 0$.
- Λέμε ότι ο α είναι ίσος με τον β και το συμβολίζουμε $\alpha = \beta$, όταν $\alpha - \beta = 0$.

Αντίστροφα

- Αν $\alpha - \beta > 0$, τότε ο α είναι μεγαλύτερος του β.
- Αν $\alpha - \beta < 0$, τότε ο α είναι μικρότερος του β.
- Αν $\alpha - \beta = 0$, τότε ο α είναι ίσος με τον β.

32. Τι ονομάζεται ανισότητα και ποια τα χαρακτηριστικά της;

- Η σχέση της μορφής $\alpha > \beta$ ονομάζεται ανισότητα με μέλη, πρώτο και δεύτερο, τα α και β αντίστοιχα.
- Οι ανισότητες $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$ λέγονται ομοιόστροφες (έχουν την ίδια φορά).
- Οι ανισότητες $\alpha < \beta$ και $\gamma > \delta$ λέγονται ετερόστροφες (έχουν αντίθετη φορά).
- Για να δηλώσουμε ότι ένας αριθμός α είναι ταυτόχρονα μεγαλύτερος του x και μικρότερος του y, γράφουμε τη « διπλή » ανισότητα $x < \alpha < y$.
- Για να δηλώσουμε ότι ένας αριθμός x είναι μεγαλύτερος ή ίσος με τον αριθμό α, γράφουμε $x \geq \alpha$.

33. Ποιες είναι οι ιδιότητες της διάταξης;

- Αν προσθέσουμε και στα δύο μέλη μιας ανισότητας τον ίδιο αριθμό, προκύπτει ανισότητα της ίδιας φοράς. Δηλαδή αν $\alpha > \beta$, τότε $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$.
- Αν προσθέσουμε κατά μέλη δύο ή περισσότερες ανισότητες της ίδιας φοράς, προκύπτει ανισότητα της ίδιας φοράς.

  Δηλαδή αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$, τότε $\alpha + \gamma > \beta + \delta$.
- Αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο θετικό αριθμό, προκύπτει ανισότητα της ίδιας φοράς.

  Δηλαδή αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > 0$, τότε $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$.
- Αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο αρνητικό αριθμό, προκύπτει ανισότητα αντίθετης φοράς.

  Δηλαδή αν $\alpha > \beta$ και $\gamma < 0$, τότε $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$
- Αν πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη δύο ανισότητες που έχουν την ίδια φορά και θετικά μέλη προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.

  Δηλαδή αν α, β, γ, δ θετικοί πραγματικοί αριθμοί με $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$ τότε $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$

Κεφάλαιο 3ο - Συστήματα Γραμμικών Εξισώσεων

Α. 3. 1

34. Τι ονομάζεται γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους και τι λύση της;

- Ονομάζεται γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x + \beta y = \gamma$.
- Λύση της γραμμική εξίσωση $\alpha x + \beta y = \gamma$ ονομάζεται κάθε ζεύγος αριθμών (x, y) που την επαληθεύει.

35. Πως παριστάνεται γραφικά κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x + \beta y = \gamma$ με $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$ και τι ισχύει γι' αυτή;

Κάθε εξίσωση της μορφής $\boldsymbol{\alpha x + \beta y = \gamma}$ με $\boldsymbol{\alpha \neq 0}$ ή $\boldsymbol{\beta \neq 0}$ παριστάνεται γραφικά με μια ευθεία **ε** έτσι ώστε:

- Αν ένα σημείο ανήκει στην ευθεία, **ε** οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση $\boldsymbol{\alpha x + \beta y = \gamma}$.
- Αν οι συντεταγμένες ενός σημείου επαληθεύουν την εξίσωση $\boldsymbol{\alpha x + \beta y = \gamma}$ το σημείο ανήκει στην ευθεία **ε** .

36. Τι παριστάνουν οι εξισώσεις;

α. $\boldsymbol{y = k}$ **με** $\boldsymbol{k \neq 0}$

β. $\boldsymbol{y = 0}$

γ. $\boldsymbol{x = k}$ **με** $\boldsymbol{k \neq 0}$

δ. $\boldsymbol{x = 0}$

α. Η εξίσωση $y = k$ με $k \neq 0$ παριστάνει μια ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, k)$ π.χ η ευθεία $y = 3$

β. Η εξίσωση $y = 0$ παριστάνει τον άξονα $x'x$.

γ. Η εξίσωση $x = k$ με $k \neq 0$ παριστάνει μια ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(k, 0)$ π.χ. η ευθεία $x = 3$

δ. Η εξίσωση $x = 0$ παριστάνει τον άξονα $y'y$.

Παράδειγμα: Να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας (ε) $3x - y = 1$ με τους άξονες.

Για $x = 0$ έχουμε $3 \cdot 0 - y = = 1$ ή $-y = 1$ ή $y = -1$, δηλαδή η ευθεία ε τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, -1)$.

Για $y = 0$ έχουμε $3x - 0 = 1$ ή $3x = 1$ ή $x = \frac{1}{3}$, δηλαδή η ευθεία ε τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(\frac{1}{3}, 0)$.

Ασκηση 1

Δίνονται οι αριθμοί $x = \sqrt{50} - \sqrt{72} - \sqrt{32} + 4\sqrt{18}$ και $y = \dfrac{\sqrt{7} + \sqrt{28} - 2\sqrt{63}}{7 \cdot \sqrt{14}}$

Α. Να υπολογίσετε τον αριθμό x.

Β. Να υπολογίσετε τον αριθμό y.

Γ. Να μετατρέψετε το κλάσμα $\dfrac{7}{x}$ σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή.

Δ. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $Λ = \dfrac{\left(x^3 \cdot y\right)^{-1} \cdot \left(x^4 \cdot y^2\right)^2}{\left(x^4 \cdot y^{-2}\right)^3 \cdot \left(x^{-5} \cdot y^{-3}\right)^2}$

<u>ΛΥΣΗ</u>

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Θέμα 2

Δίνονται οι αριθμοί $x = \sqrt{4+\sqrt{29-\sqrt{6+\sqrt{100}}}}$ και $y=\sqrt{18}-\sqrt{72}+\sqrt{200}-\sqrt{32}$

Α. Να υπολογίσετε τον αριθμό x.

Β. Να γράψετε τον αριθμό y στην μορφή $\beta\sqrt{2}$

Γ. Να κάνετε τις πράξεις

i) $(x-y)^2$ ii) $(y-x)(x+y)$

<u>ΛΥΣΗ</u>

Θέμα 3

Δίνεται ο αριθμός $x = 3 - \sqrt{8}$.

Α. Να αποδείξετε ότι $\left(3+\sqrt{8}\right)\left(3-\sqrt{8}\right) = 1$.

Β. Να βρείτε τον αντίστροφο του αριθμού x.

Γ. Να υπολογίσετε την παράσταση $x + \dfrac{1}{x}$.

ΛΥΣΗ

Θέμα 4

Δίνονται οι εξισώσεις: $x^2 - 7x + 6 = 0$ και $x^2 + 7x + 6 = 0$

Α. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις και μετά να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα: $x^2 - 7x + 6$ και $x^2 + 7x + 6$

Β. Δίνονται οι παραστάσεις: $K = \dfrac{x^2 - 7x + 6}{x^2 - 36}$, $\Lambda = \dfrac{x^2 + 7x + 6}{x^2 - 1}$

Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζονται οι παραστάσεις Α και Β και μετά να τις απλοποιήσετε.

Γ. Να αποδείξετε ότι η παράσταση $(2A + 2B)^2 - (2A - 2B)^2$ είναι ανεξάρτητη του x.

ΛΥΣΗ

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Θέμα 5ο

Α. Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 5x + 4 = 0$.

Β. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις $x^2 - 16$, $x^2 - 5x + 4$ και στη συνέχεια να απλοποιήσετε το κλάσμα $\dfrac{1-x}{x^2 - 5x + 4}$

Γ. Να υπολογίσετε την παράσταση $\dfrac{1}{x^2 - 16} - \dfrac{1}{x - 4} + \dfrac{1-x}{x^2 - 5x + 4}$

ΛΥΣΗ

Θέμα 6

Α. Να λύσετε την εξίσωση $-2x^2 = 3x - 5$

Β. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται το κλάσμα $K = \dfrac{-2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1}$

και να το απλοποιήσετε.

ΛΥΣΗ

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Θέμα 7

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)= x^3 +\alpha x^2 + \beta x +12$ για το οποίο ισχύει: $P(-1) = 12$ και $P(-3) = -30$.

Α. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -3$ και $\beta = -4$

Β. Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$

Γ. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$

ΛΥΣΗ

Θέμα 8

Δίνεται η παράσταση $\Lambda = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^3 + 4x^2 - 5x}$

Α. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Λ.

Β. Να απλοποιήσετε την παραπάνω παράσταση και να δείξετε ότι $\Lambda = \dfrac{x-2}{x+5}$

Γ. Να λυθεί η εξίσωση $\Lambda^2 - 4\Lambda + 4 = 0$.

ΛΥΣΗ.

Θέμα 9

Α. Να απλοποιηθεί η παράσταση $K = \dfrac{2-4x}{x^2-2x+1} \cdot \dfrac{1-x}{8x-4}$

Β. Να απλοποιηθεί η παράσταση $\Lambda = \dfrac{2x-6}{2x^2-3x} \cdot \dfrac{4x^2-9}{9-3x}$

<u>ΛΥΣΗ</u>

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Θέμα 10

Δίνονται οι παραστάσεις $K = x^2(x-4) + x - 4 + 2x(x-4)$ και $\Lambda = (x-4)^2 - (4+x)(4-x)$.

Α. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις Κ και Λ.

Β. Να λύσετε την εξίσωση Κ = 0

ΛΥΣΗ

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Θέμα 11ο

Δίνεται η ανίσωση $\frac{x+5}{6} - \frac{x-4}{9} \leq \frac{x+7}{3}$

Α. Να λύσετε την ανίσωση.

Β. Αν α η μικρότερη ακέραια λύση της παραπάνω ανίσωσης, να λύσετε την εξίσωση $x^3 - 2x^2 - x + 5 + \alpha = 0$ (1)

Γ. Αν β η μεγαλύτερη θετική ρίζα της εξίσωσης (1) να λύσετε την εξίσωση $x^2 = \beta$

ΛΥΣΗ

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Θέμα 12

Α. Να λύσετε την εξίσωση $3x^3 + 8 = 12x + 2x^2$.

Β. Να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{2x-1}{2} \geq \dfrac{x-2(x-1)}{4}$.

Γ. Δίνεται το πολυώνυμο $p(x) = 3x^3 + 8 - 12x - 2x^2$ και κ η κοινή λύση της εξίσωσης και της ανίσωσης του Α και Β ερωτήματος.

Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή του πολυωνύμου p(x) για x = κ.

ΛΥΣΗ

Θέμα 13

Α. Να λύσετε την ανίσωση $2(x-2)-3 \geq 3(x-1)-6$.

Β. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{4x-3}{2}-\frac{x-2}{4}>\frac{3x-3}{2}$.

Γ. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των παραπάνω δύο ανισώσεων και στη συνέχεια να ονομάσετε κ τη μεγαλύτερη κοινή θετική ακέραια λύση.

Δ. Να υπολογίσετε το βαθμό του πολυωνύμου $\mathrm{p}(x)=4x^k-8x-4x^2+6$ και στη συνέχεια να βρείτε τα α,β,γ ώστε τα πολυώνυμα p(x), $\mathrm{q}(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ να είναι ίσα.

ΛΥΣΗ

Θέμα 14

Α. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{2x+1}{6}-x<\frac{3-2x}{3}$.

Β. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{1}{2}(7x-9)<x+3$.

Γ. i) Αν λ η μεγαλύτερη κοινή θετική ακέραια λύση των παραπάνω δύο ανισώσεων, να βρείτε το βαθμό του πολυωνύμου $p(x)=\left(4x^3-5x^{\lambda}+8\right)-\left(4x^{\lambda+1}-6x^2-6x+1\right)$.

ii) Να βρεθούν τα α,β,γ ώστε τα πολυώνυμα p(x), $q(x)=\alpha x^2+\left(\beta+1\right)x+\gamma$ να είναι ίσα.

<u>ΛΥΣΗ</u>

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....