2.5 ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ
ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΕΝΑΝ ΑΓΝΩΣΤΟ
Ασκήσεις σχ. βιβλίου σελίδων 115 – 117

Ερωτήσεις κατανόησης

1.
Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με ένα (Σ) αν είναι σωστές και με ένα (Λ) αν είναι λανθασμένες

α) Αν $\alpha < 6$ τότε $\alpha - 6 < 0$ (Σ)
β) Αν $\alpha > \beta$ τότε $-\alpha < -\beta$ (Σ)
γ) Αν $\alpha < 0$ τότε $-\alpha > 0$ (Σ)
δ) Αν $-3x > -12$ τότε $x > 4$ (Λ)
ε) Αν $\frac{x}{-4} > \frac{y}{-4}$ τότε $x > y$ (Λ)
στ) Αν $x > 0$ τότε $x + 5 > 0$ (Σ)
ζ) Αν $\alpha > 6$ και $\beta > -4$ τότε $\alpha + \beta > 2$ (Σ)
η) Αν $x > 2$ και $y > 3$ τότε $xy > 6$ (Σ)

Προτεινόμενη λύση

α) (Σ) από την θεωρία

β) (Σ) διότι αν αλλάξουμε τα πρόσημα των μελών μιας ανισότητας η ανισότητα αλλάζει φορά

γ) (Σ) διότι αν α αρνητικός ο – α είναι θετικός

δ) (Λ) διότι αν διαιρέσουμε τα μέλη μιας ανισότητας με έναν αρνητικό αριθμό η ανισότητα αλλάζει φορά

ε) (Λ) διότι αν πολλαπλασιάσουμε τα μέλη μιας ανισότητας με έναν αρνητικό αριθμό η ανισότητα αλλάζει φορά

στ) (Σ) διότι αφού $x > 0$ και $5 > 0$ είναι και $x + 5 > 0$

ζ) (Σ) διότι αν προσθέσουμε κατά μέλη ομοιόστροφες ανισότητες προκύπτει ανισότητα της ίδιας φοράς .

η) (Σ) διότι αν πολλαπλασιάσουμε ομοιόστροφες ανισότητες με θετικά μέλη κατά μέλη προκύπτει ανισότητα της ίδιας φοράς

2. Να συμπληρώσετε τα κενά με ένα από τα σύμβολα $>,\ <,\ \geq,\ \leq$ ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις

α) Αν $\alpha > 3$ τότε $\alpha - 3 > 0$ **β)** Αν $\alpha < \beta$ και $\beta < \gamma$ τότε $\alpha < \gamma$

γ) Αν $\alpha > 0$ και $\beta < 0$ τότε $\frac{\alpha}{\beta} < 0$ **δ)** Αν $\gamma < 0$ και $\alpha\gamma \leq \beta\gamma$ τότε $\alpha \geq \beta$

ε) Αν $\alpha \neq 0$ τότε $\alpha^2 > 0$ **στ)** Αν $\alpha \leq 0$ και $\beta \leq 0$ τότε $\alpha + \beta \leq 0$

Προτεινόμενη λύση

α) Αν $\alpha > 3$ τότε $\alpha - 3 > 0$

β) Αν $\alpha < \beta$ και $\beta < \gamma$ τότε $\alpha < \gamma$ λόγω της μεταβατικής ιδιότητας

γ) Αν $\alpha > 0$ και $\beta < 0$ τότε $\frac{\alpha}{\beta} < 0$ διότι το πηλίκο ετεροσήμων είναι αρνητικό

δ) Αν $\gamma < 0$ και $\alpha\gamma \leq \beta\gamma$ τότε $\alpha \geq \beta$ διότι διαιρώντας τα μέλη μιας ανισότητας με αρνητικό αριθμό η ανισότητα αλλάζει φορά

ε) Αν $\alpha \neq 0$ τότε $\alpha^2 > 0$ διότι το τετράγωνο ενός μη μηδενικού αριθμού είναι θετικός αριθμός

στ) Αν $\alpha \leq 0$ και $\beta \leq 0$ τότε $\alpha + \beta \leq 0$ διότι προσθέτοντας ομοιόστροφες ανισότητες κατά μέλη προκύπτει ανισότητα ίδιας φοράς

3. Ποιες ιδιότητες της διάταξης χρησιμοποιούμε ώστε από την ανίσωση $3x - 4 < 7$ να γράψουμε $3x < 7 + 4$ και από την ανίσωση $3x < 11$ να γράψουμε $x < \frac{11}{3}$;

Προτεινόμενη λύση

α) Προσθέτουμε και στα δύο μέλη το 4

β) Διαιρούμε και τα δύο μέλη με το 3

4. Με ποιες ιδιότητες της διάταξης, από την ανισότητα $x > 3$, προκύπτουν οι παρακάτω ανισότητες

α) $x + 4 > 7$ **β)** $x - 2 > 1$ **γ)** $5x > 15$ **δ)** $-6x < -18$

Προτεινόμενη λύση **α)** Προσθέτουμε και στα δύο μέλη το 4

β) Αφαιρούμε και από τα δύο μέλη το 2

γ) Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη το 5

δ) Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη το -6

5. Αν $\alpha > 12$ και $\beta > 3$, τότε ποιες από τις παρακάτω ανισότητες προκύπτουν από τις ιδιότητες της διάταξης ;

α) $\alpha + \beta > 15$ **β)** $\alpha - \beta > 9$ **γ)** $\alpha\beta > 36$ **δ)** $\frac{\alpha}{\beta} > 4$

Προτεινόμενη λύση

α) Ναι : με πρόσθεση των υποθέσεων κατά μέλη
β) Όχι : απαγορεύεται αφαίρεση ανισοτήτων
γ) Ναι : πολλαπλασιασμός ομοιοστρόφων ανισοτήτων θετικών μελών κατά μέλη
δ) Όχι : απαγορεύεται διαίρεση ανισοτήτων

Ασκήσεις

11. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x και y να αποδείξετε ότι

α) $x^2 + 1 \geq 2x$ **β)** $(x + y)^2 \geq 4xy$ **γ)** $x^2 + y^2 + 1 \geq 2y$

Προτεινόμενη λύση

α)

$x^2 + 1 \geq 2x$ άρα $x^2 + 1 - 2x \geq 0$

$(x-1)^2 \geq 0$ η οποία ισχύει για οποιοδήποτε x

Παρατήρηση : αν $x = 1$ η σχέση ισχύει με το $=$, ενώ αν $x \neq 1$ ισχύει η ανισότητα

β)

$(x + y)^2 \geq 4xy$ άρα $x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy$

$x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$

$(x - y)^2 \geq 0$ η οποία ισχύει για οποιαδήποτε x και y

Παρατήρηση : αν $x = y$ η σχέση ισχύει με το $=$, ενώ αν $x \neq y$ ισχύει η ανισότητα

γ)

$x^2 + y^2 + 1 \geq 2y$ άρα $x^2 + y^2 + 1 - 2y \geq 0$

$x^2 + (y-1)^2 \geq 0$

η οποία ισχύει για οποιοδήποτε x και y ως άθροισμα μη αρνητικών αριθμών

Παρατήρηση : αν $x = 0$ **και** $y = 1$ η σχέση ισχύει με το $=$
ενώ αν $x \neq 0$ **ή** $y \neq 1$ ισχύει η ανισότητα

16.

Να λύσετε τις ανισώσεις

α) $11 - 3x < 7x + 1$ **β)** $2x - 9 > 5x + 6$ **γ)** $4(3x-5) > 3(4x + 5)$

δ) $\frac{3-4x}{5} - \frac{3x}{10} > \frac{6-x}{2}$ **ε)** $\frac{2x+1}{6} - x < \frac{3-2x}{3}$ **στ)** $1 - \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{3}\right) < \frac{x+4}{6}$

Προτεινόμενη λύση

α)

$11 - 3x < 7x + 1$ άρα $-7x - 3x < 1 - 11$

$-10x < -10$

$10x > 10$

$x > 1$

β) $2x - 9 > 5x + 6$ άρα $2x - 5x > 9 + 6$

$-3x > 15$

$3x < -15$

$x < -5$

γ) $4(3x - 5) > 3\,(4x + 5)$ άρα $12x - 20 > 12x + 15$

$0x > 35$

$0 > 35$ αδύνατη

δ) $\frac{3-4x}{5} - \frac{3x}{10} > \frac{6-x}{2}$ άρα $10 \cdot \frac{3-4x}{5} - 10 \cdot \frac{3x}{10} > 10 \cdot \frac{6-x}{2}$

$2(3 - 4x) - 3x > 5(6 - x)$

$6 - 8x - 3x > 30 - 5x$

$-6x > 24$

$6x < -24$

$x < -4$

ε)

$\frac{2x+1}{6} - x < \frac{3-2x}{3}$ άρα $6 \cdot \frac{2x+1}{6} - 6x < 6 \cdot \frac{3-2x}{3}$

$2x + 1 - 6x < 2(3 - 2x)$

$2x + 1 - 6x < 6 - 4x$

$0x < 5$ αληθεύει για κάθε αριθμό x

στ)

$1 - \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{3}\right) < \frac{x+4}{6}$ άρα $1 - \frac{x}{2} - \frac{1}{3} < \frac{x+4}{6}$

$6 - 6 \cdot \frac{x}{2} - 6 \cdot \frac{1}{3} < 6 \cdot \frac{x+4}{6}$

$6 - 3x - 2 < x + 4$

$-4x < 0$

$4x > 0$

$x > 0$

17. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων

α) $\begin{cases} 7x-1<8+6x \\ 3x-2>x-10 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} 4x+3<9+5x \\ 1-x<2x+7 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} 2x+5<\frac{x}{2}+2 \\ \frac{x-1}{2}+1>x+\frac{1}{3} \end{cases}$

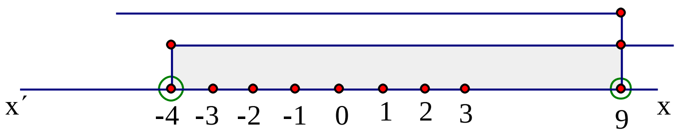
Προτεινόμενη λύση

α) Λύνουμε κάθε ανίσωση χωριστά

$7x-1<8+6x$ άρα $x<9$ **(1)**

$3x-2>x-10$ άρα $2x>-8$ άρα $x>-4$ **(2)**

Συναλήθευση των (1) και (2) στην ευθεία των πραγματικών αριθμών

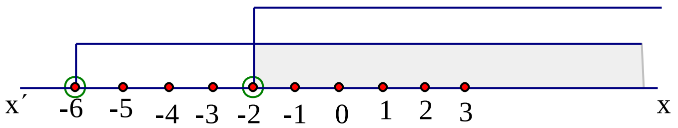


Άρα οι κοινές λύσεις των ανισώσεων είναι οι $-4<x<9$

β) $4x+3<9+5x$ άρα $-x<6$ άρα $x>-6$ **(1)**

$1-x<2x+7$ άρα $-3x<6$ άρα $3x>-6$ άρα $x>-2$ **(2)**

Συναλήθευση των (1) και (2) στην ευθεία των πραγματικών αριθμών



Άρα οι κοινές λύσεις των ανισώσεων είναι οι $x>-2$

γ) $2x+5<\frac{x}{2}+2$ άρα $4x+10<x+4$ άρα $3x<-6$ άρα $x<-2$ **(1)**

$\frac{x-1}{2}+1>x+\frac{1}{3}$ άρα $3(x-1)+6>6x+2$

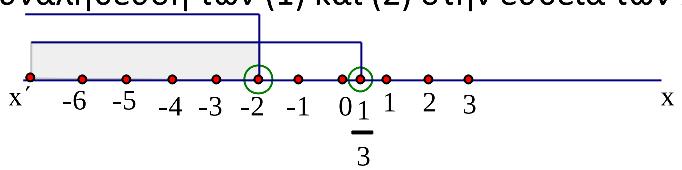
$3x-3+6>6x+2$

$-3x>-1$

$3x<1$

$x<\frac{1}{3}$ **(2)**

Συναλήθευση των (1) και (2) στην ευθεία των πραγματικών αριθμών



Άρα οι κοινές λύσεις των ανισώσεων είναι οι $x<-2$

18. Να βρείτε θετικό ακέραιο αριθμό x ώστε :

$\frac{x}{x+1} < \frac{31}{40}$ και $\frac{x+1}{x+2} > \frac{31}{40}$

Προτεινόμενη λύση

$\frac{x}{x+1} < \frac{31}{40}$ ΕΚΠ = 40 (x + 1) > 0 αφού x θετικός ακέραιος

$\frac{x}{x+1} < \frac{31}{40}$ άρα $40(x+1)\frac{x}{x+1} < 40(x+1)\frac{31}{40}$

$40x < 31(x + 1)$

$40x < 31x + 31$

$9x < 31$ άρα

$x < \frac{31}{9}$ με x θετικό ακέραιο **(1)**

$\frac{x+1}{x+2} > \frac{31}{40}$ ΕΚΠ = 40(x + 2) > 0 αφού x θετικός ακέραιος

$\frac{x+1}{x+2} > \frac{31}{40}$ άρα $40(x+2)\frac{x+1}{x+2} > 40(x+2)\frac{31}{40}$

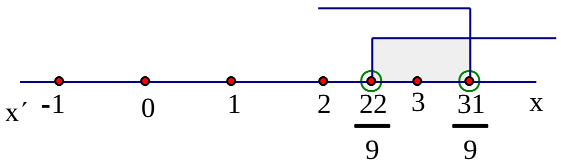
$40(x + 1) > 31(x + 2)$

$40x + 40 > 31x + 62$

$9x > 22$

$x > \frac{22}{9}$ με x θετικό ακέραιο **(2)**

Συναλήθευση των (1) και (2) στην ευθεία των πραγματικών αριθμών



Οι κοινές λύσεις των ανισώσεων είναι οι $\frac{22}{9} < x < \frac{31}{9}$ με x θετικό ακέραιο

άρα x = 3