ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

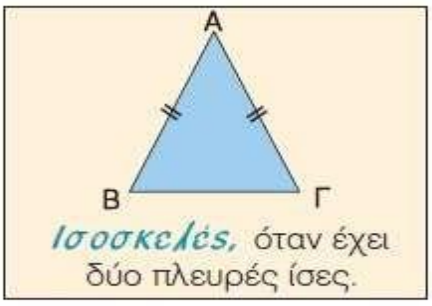
ΙΣΟΤΗΤΑ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

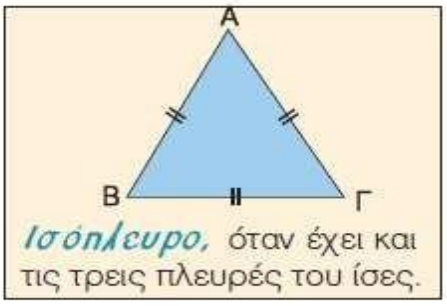
Γρήγορη Επανάληψη Θεωρίας

- Ένα τρίγωνο ανάλογα με το είδος των γωνιών του ονομάζεται:

- Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο η πλευρά που βρίσκεται απέναντι από την ορθή γωνία ονομάζεται **υποτείνουσα**, ενώ οι άλλες δύο ονομάζονται **κάθετες πλευρές.**

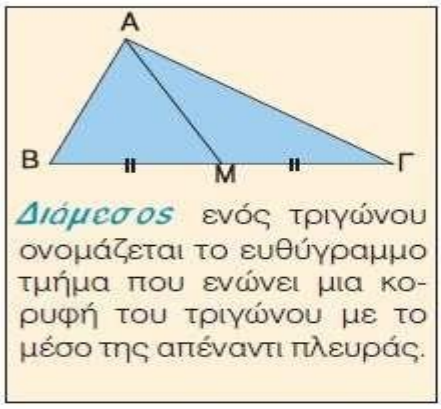
- Ένα τρίγωνο ανάλογα με τις σχέσεις που συνδέονται οι πλευρές του ονομάζεται:

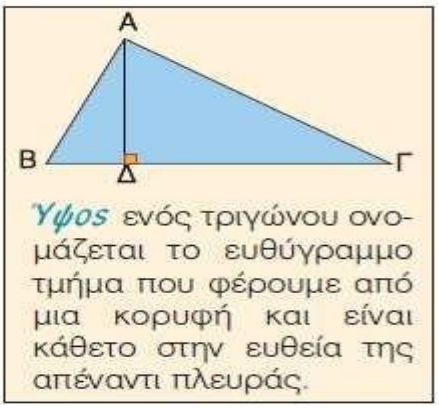




- Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ η πλευρά ΒΓ ονομάζεται **βάση** του και το σημείο Α **κορυφή** του.

- Σ΄ ένα τρίγωνο, εκτός από τα κύρια στοιχεία, υπάρχουν και τα **δευτερεύοντα στοιχεία**, που είναι οι διάμεσοι, οι διχοτόμοι και τα ύψη.





- **Πότε δυο τρίγωνα ονομάζονται ίσα;**

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, τότε είναι ίσα.

- Ισχύει ακόμη και το **αντίστροφο**. Δηλαδή

Αν δύο τρίγωνα είναι ίσα, τότε θα έχουν τις πλευρές τους και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες μία προς μία.

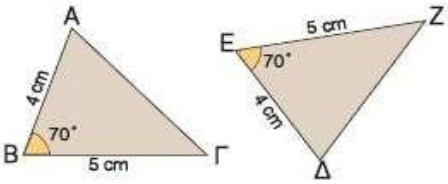
- **Σε ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες.**
- **Σε ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές.**

- **Κριτήρια ισότητας τριγώνων**

1ο κριτήριο ισότητας (Π - Γ - Π)

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση, τότε είναι ίσα.

Παράδειγμα



Για παράδειγμα, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ του διπλανού σχήματος είναι ίσα, αφού έχουν δύο πλευρές ίσες (ΑΒ = ΔΕ = 4 cm, ΒΓ = ΕΖ = = 5 cm) και την περιεχόμενη γωνία τους ίση ($\hat{B} = \hat{E} = 70^{o}$).

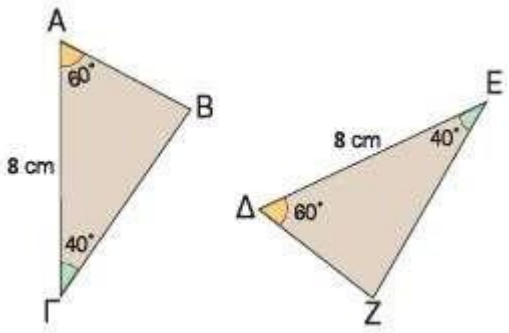
Επομένως, τα τρίγωνα θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, δηλαδή ΑΓ = ΔΖ, $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$ και $\hat{\Delta} = \hat{A}$.

Παρατηρούμε ότι οι ίσες γωνίες $\hat{\Gamma}$, $\hat{Z}$ βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΒ, ΕΔ.

2ο κριτήριο ισότητας (Γ - Π - Γ).

Αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

Παράδειγμα



Για παράδειγμα, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ του διπλανού σχήματος είναι ίσα, αφού έχουν μία πλευρά ίση (ΑΓ = ΔΕ = 8 cm) και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες ($\hat{A} = \hat{\Delta} = 60^{\circ}$, $\hat{\Gamma} = \hat{E} = 40^{\circ}$). Επομένως τα τρίγωνα θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, δηλαδή

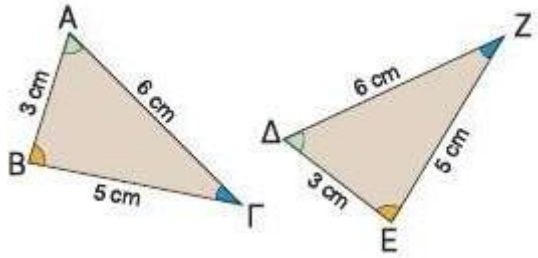
$\hat{B} = \hat{Z}$, ΑΒ = ΔΖ, ΒΓ = ΕΖ.

Παρατηρούμε ότι οι ίσες πλευρές ΑΒ, ΔΖ βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{\Gamma}$, $\hat{E}$.

3ο κριτήριο ισότητας (Π - Π - Π)

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες <u>μία προς μία</u>, τότε είναι ίσα.

<u>Παράδειγμα</u>



Για παράδειγμα, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ του διπλανού σχήματος είναι ίσα, αφού έχουν και τις τρεις πλευρές τους ίσες, ΑΒ = ΔΕ = 3 cm, ΑΓ = ΔΖ = 6 cm και ΒΓ = ΕΖ = 5 cm. Άρα θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, δηλαδή

$\hat{A} = \hat{\Delta}$, $\hat{B} = \hat{E}$ και $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$.

- **Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων**

Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν

- **δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία ή**
- **μία αντίστοιχη πλευρά ίση και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίση.**

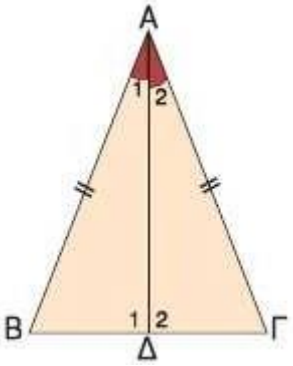
Λυμένες Εφαρμογές S.O.S

1) Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) φέρνουμε τη διχοτόμο ΑΔ.

α) Να συγκριθούν τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ.

β) Να αποδειχθεί ότι Β = Γ και ότι η διχοτόμος ΑΔ είναι διάμεσος και ύψος.

Λύση



α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΔΓ και παρατηρούμε ότι έχουν:

- ΑΔ = ΑΔ, κοινή πλευρά
- ΑΒ = ΑΓ από την υπόθεση
- $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, αφού ΑΔ διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$. Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση.

β) Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι ίσα, θα έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, ΒΔ = ΔΓ και $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$. Αφού είναι $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$ και $\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 = 180^{\circ}$, θα έχουμε $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = 90^{\circ}$, οπότε η διχοτόμος ΑΔ είναι και ύψος. Η διχοτόμος ΑΔ είναι και διάμεσος, αφού ΒΔ = ΔΓ.

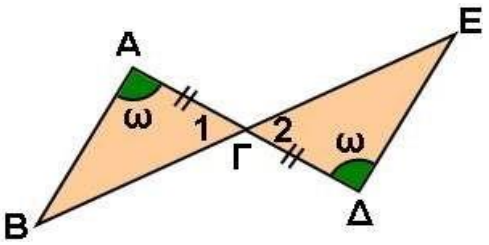
Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο:

α) Οι γωνίες της βάσης του είναι ίσες.

β) Η διχοτόμος, το ύψος και η διάμεσος που φέρνουμε από την κορυφή προς τη βάση του συμπίπτουν.

2) Στο διπλανό σχήμα είναιΑ = Δ = ω και ΑΓ = ΓΔ. Να αποδειχθεί ότι ΑΒ = ΔΕ.



Λύση

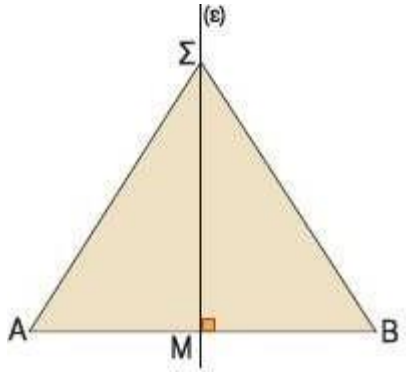
Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΓΔΕ και παρατηρούμε ότι έχουν:

- ΑΓ = ΓΔ από την υπόθεση
- $\widehat{A} = \widehat{\Delta}$ από την υπόθεση
- $\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{\Gamma}_2$ γιατί είναι κατακορυφήν γωνίες

Άρα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΔΕ είναι ίσα, γιατί έχουν μια πλευρά ίση και τις προσκείμενες σε αυτή την πλευρά γωνίες ίσες μία προς μία. Αφού τα τρίγωνα είναι ίσα, θα έχουν και όλα τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε ΑΒ = ΔΕ.

3) Να αποδειχθεί ότι κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.

Λύση



Φέρουμε τη μεσοκάθετο ε ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ που το τέμνει στο σημείο Μ. Αν Σ είναι τυχαίο σημείο της μεσοκαθέτου, θα αποδείξουμε ότι ΣΑ = ΣΒ. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΜΣ, ΒΜΣ και παρατηρούμε ότι έχουν:

- ΣΜ = ΣΜ, κοινή πλευρά και
- ΑΜ = ΜΒ,αφού το Μ είναι μέσον του ΑΒ.

Άρα τα ορθογώνια αυτά τρίγωνα είναι ίσα, γιατί έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές τους ίσες μία προς μία. Αφού τα τρίγωνα είναι ίσα, θα έχουν και τα υπόλοιπα αντί-στοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε ΣΑ = ΣΒ.

Χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος

Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.

Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος.

4)Να αποδειχθεί ότι κάθε σημείο της διχοτόμου γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της.

Λύση

Φέρνουμε τη διχοτόμο Oz της γωνίας xÔy και πάνω σ΄ αυτήν παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο Α. Αν ΑΒ, ΑΓ είναι οι αποστάσεις του σημείου Α από τις πλευρές της γωνίας, θα αποδείξουμε ότι ΑΒ = ΑΓ. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΑΓ και παρατηρούμε ότι έχουν:

- ΟΑ = ΟΑ κοινή πλευρά και
- $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$, αφού η Oz είναι διχοτόμος της γωνίας xÔy.

Άρα τα ορθογώνια αυτά τρίγωνα είναι ίσα, γιατί έχουν αντίστοιχα μια πλευρά και μια οξεία γωνία ίση.

Αφού τα τρίγωνα είναι ίσα, θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε ΑΒ = ΑΓ.

Χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων της διχοτόμου μιας γωνίας

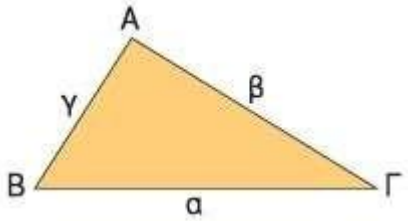
Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας.

Κάθε εσωτερικό σημείο μιας γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές είναι σημείο της διχοτόμου της.

Συμπληρώστε τα κενά Για Εξάσκηση

1) Σε κάθε τρίγωνο οι …….. και οι.....του ονομάζονται κύρια στοιχεία του τριγώνου.

2) Η γωνία του τριγώνου που περιέχεται μεταξύ δύο πλευρών λέγεται …… γωνία των πλευρών αυτών
π.χ. στο διπλανό τρίγωνο
περιεχόμενη γωνία των πλευρών ΑΒ, ΑΓ είναι η γωνία……..
Οι γωνίες του τριγώνου που έχουν ……τα άκρα μιας πλευράς λέγονται ……..γωνίες της πλευράς αυτής π.χ. στο διπλανό τρίγωνο προσκείμενες γωνίες της πλευράς ΒΓ είναι οι ……και ……..



3) Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο η πλευρά που βρίσκεται απέναντι από την ορθή γωνία ονομάζεται ....., ενώ οι άλλες δύο ονομάζονται …… ……..

4) Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ η πλευρά ΒΓ ονομάζεται …….του και το σημείο Α ..... του.

5) Σ' ένα τρίγωνο, εκτός από τα κύρια στοιχεία, υπάρχουν και τα …… ……., που είναι οι διάμεσοι, οι ……. και τα ……..

6) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις .....τους ίσες ……..και τις αντίστοιχες.....τους ίσες, τότε είναι ίσα.

7) Αν δύο τρίγωνα είναι ίσα, τότε θα έχουν τις..... τους και τις.....ίσες μία προς μία.

8) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο..... ίσες μία προς μία και την ……. …….. τους ίση, τότε είναι ίσα.

9) Σε…… τρίγωνα.....από ίσες πλευρές βρίσκονται …… …….

10) Αν δύο τρίγωνα έχουν ..... και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες …… ……., τότε είναι ίσα.

11) Σε ίσα τρίγωνα απέναντι από… ..... γωνίες βρίσκονται ίσες ……..

12) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις..... τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

13) Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν….....αντίστοιχες ……. τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

14) Αν δύο.....τρίγωνα έχουν μία αντίστοιχη πλευρά ίση και μία ..... γωνία ίση, τότε είναι ίσα.

15) Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο οι γωνίες της ..... του είναι ίσες.

16) Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο η διχοτόμος, το.....και η …… που φέρνουμε από την ..... προς τη βάση του συμπίπτουν.

17) Κάθε σημείο της.....ενός ευθύγραμμου τμήματος..... από τα άκρα του.

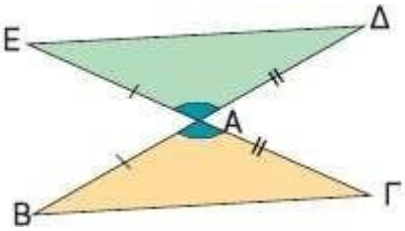
18) Κάθε σημείο που.....από τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι σημείο της …… του ευθύγραμμου τμήματος.

19) Κάθε σημείο της.....μιας γωνίας …….....από τις ..... της γωνίας.

20) Κάθε.....μιας γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές είναι σημείο της….....της.

Ερωτήσεις Κατανόησης Σχολικού Βιβλίου

1) Να εξηγήσετε γιατί είναι ίσα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΕΔ του παρακάτω σχήματος και να συμπληρώσετε τις ισότητες.



……

……

……

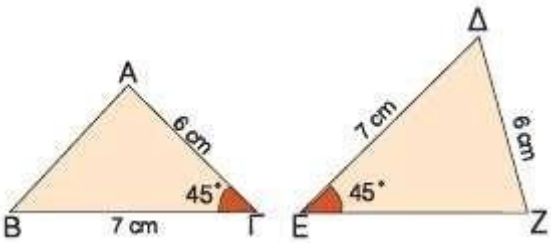
……

……

……

$\hat{B}$= ....., $\hat{\Gamma}$ = ... και ΒΓ = ...

2) Να εξηγήσετε γιατί δεν είναι ίσα τα τρίγωνα του διπλανού σχήματος, αν και έχουν δύο πλευρές ίσες και μια γωνία ίση.



……

……

……

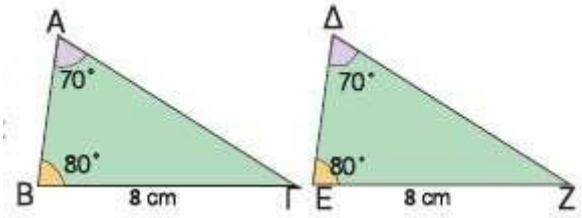
……

……

……

……

3) Να εξηγήσετε γιατί είναι ίσα τα τρίγωνα του διπλανού σχήματος και να συμπληρώσετε τις ισότητες



……

……

……

……

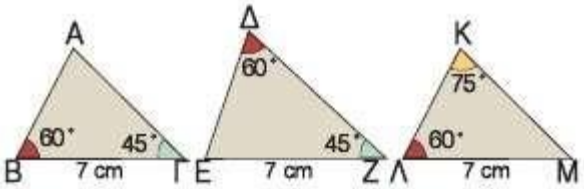
……

……

……

ΑΒ = …..…. και ΑΓ = ….……

4) Να βρείτε το ζεύγος των ίσων τριγώνων του παρακάτω σχήματος. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



……

……

……

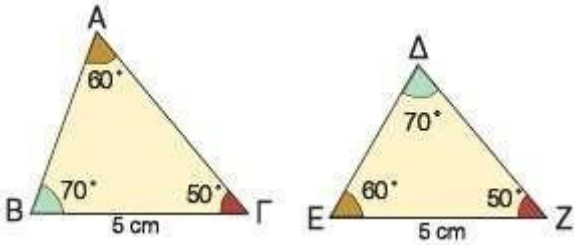
……

……

……

……

5) Είναι ίσα τα τρίγωνα του παρακάτω σχήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



.....

.....

.....

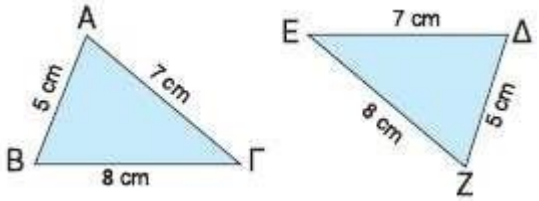
.....

.....

.....

.....

6) Να εξηγήσετε γιατί είναι ίσα τα τρίγωνα του διπλανού σχήματος και να συμπληρώσετε τις ισότητες



.....

.....

.....

.....

.....

.....

$\widehat{A}$= ..... , $\widehat{B}$= ..... και $\widehat{\Gamma}$ = ...

7) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

α) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα. ☐

β) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

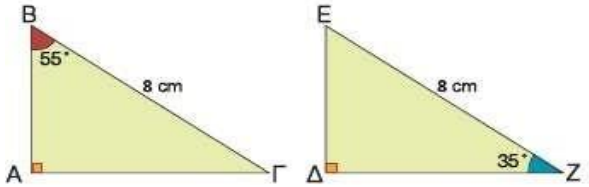
γ) Σε δύο τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες.

δ) Σε δύο ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές.

ε) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, τότε θα έχουν και την τρίτη τους γωνία ίση. ☐

στ) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία, τότε θα έχουν και την τρίτη τους πλευρά ίση ☐

8) Είναι ίσα τα ορθογώνια τρίγωνα του διπλανού σχήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



……

……

……

……

……

……

……

……

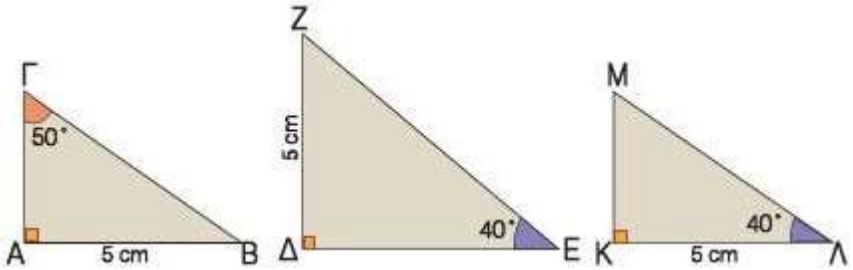
9) Να βρείτε το ζεύγος των ίσων τριγώνων. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

……

……

……

……



……

……

……

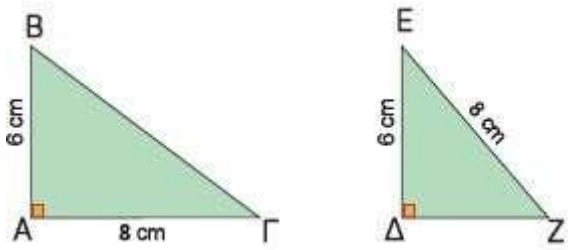
……

……

……

……

10) Τα ορθογώνια τρίγωνα του διπλανού σχήματος έχουν δύο πλευρές ίσες. Να εξηγήσετε γιατί δεν είναι ίσα.



……

……

……

……

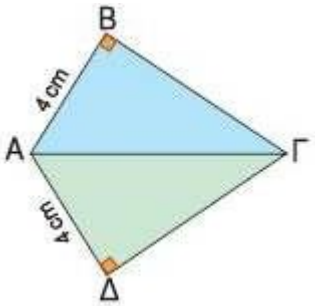
……

……

……

……

11) Να αιτιολογήσετε γιατί είναι ίσα τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΔ.



……

……

……

……

……

……

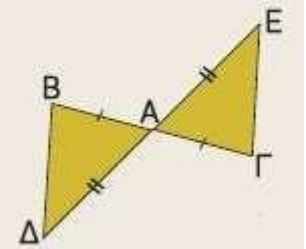
……

……

……

Ασκήσεις Σχολικού Βιβλίου

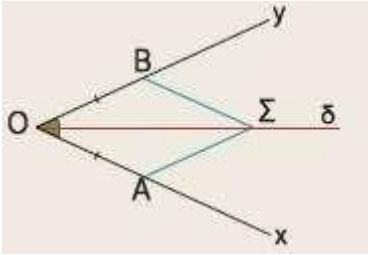
1) Στο διπλανό σχήμα είναι ΑΒ = ΑΓ και ΑΔ = ΑΕ.



Να αποδείξετε ότι ΒΔ = ΓΕ.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

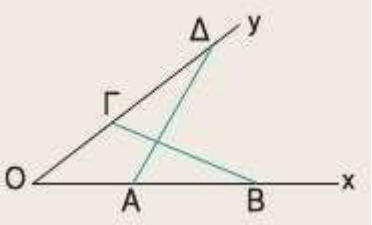
2) Στο διπλανό σχήμα η Οδ είναι διχοτόμος της γωνίας xÔy. Αν ΟΑ = ΟΒ και Σ τυχαίο σημείο της διχοτόμου, να αποδείξετε ότι ΣΑ = ΣΒ.



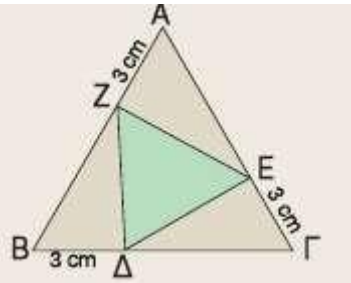
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

3) Στη βάση ΒΓ ενός ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ να πάρετε σημεία Δ, Ε, ώστε ΒΔ = ΓΕ. Να αποδείξετε ότι ΑΔ = ΑΕ.

4) Στο διπλανό σχήμα είναι ΟΑ = ΟΓ και ΟΒ = ΟΔ. Να αποδείξετε ότι ΒΓ = ΑΔ.

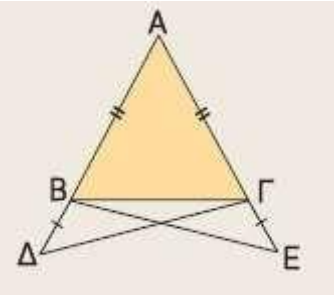


5) Κάθε πλευρά του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ είναι 8 cm. Αν είναι ΑΣ = ΒΔ = ΓΕ = 3 cm, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισόπλευρο.



.....
.....
.....
.....
.....
.....

6) Στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών ΑΒ, ΑΓ ενός ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ να πάρετε αντιστοίχως τμήματα ΒΔ = ΓΕ. Να αποδείξετε ότι $\hat{\Delta} = \hat{E}$.



.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

7) Σ΄ ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ η διαγώνιος ΑΓ διχοτομεί τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι ΑΒ = ΑΔ και ΒΓ = ΓΔ.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

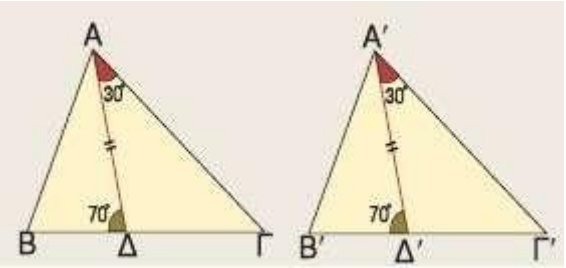
……

……

8) Να αποδείξετε ότι οι απέναντι πλευρές ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες.

……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……

9) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ του διπλανού σχήματος έχουν τις διχοτόμους ΑΔ και Α΄Δ΄ ίσες. Να αποδείξετε ότι:

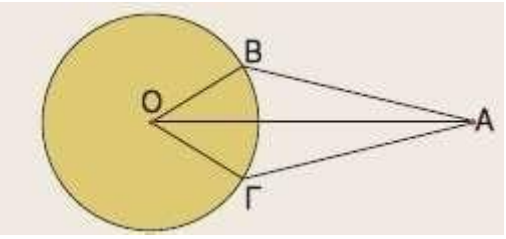


α) ΑΒ = Α΄Β΄

β) τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα. .

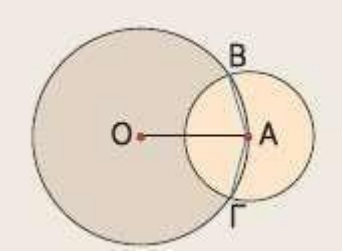
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……

10) Στο διπλανό σχήμα το σημείο Α ισαπέχει από τα σημεία Β και Γ ενός κύκλου που έχει κέντρο το σημείο Ο. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΑΓ είναι ίσα. .



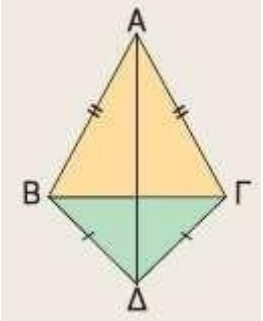
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

11) Αν Ο, Α είναι τα κέντρα των κύκλων του διπλανού σχήματος, να αποδείξετε ότι η ΑΟ διχοτομεί τη γωνία ΒΑΓ.



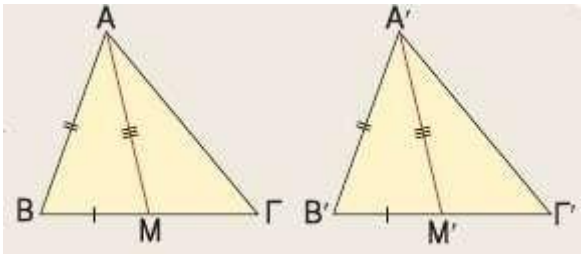
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

12) Τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΓ του διπλανού σχήματος έχουν κοινή βάση ΒΓ. Να αποδείξετε ότι η ΑΔ διχοτομεί τις γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{\Delta}$.



.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

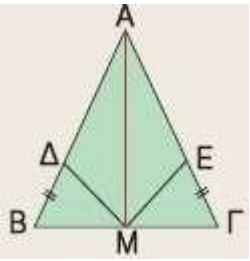
13) Στα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ του διπλανού σχήματος οι διάμεσοιΑΜ και Α΄Μ΄ είναι ίσες.
Αν ΑΒ = Α΄Β΄ και ΒΜ = Β΄Μ΄, τότε να αποδείξετε ότι:



α) $\widehat{B} = \widehat{B}'$.
β) τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα.

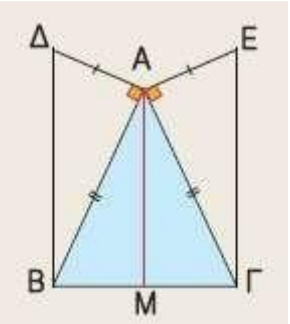
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

14) Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ το σημείο Μ είναι μέσο της βάσης ΒΓ. Αν είναι ΒΔ = ΓΕ, να αποδείξετε ότι:
α) το τρίγωνο ΜΔΕ είναι ισοσκελές
β) τα τρίγωνα ΑΔΜ και ΑΕΜ είναι ίσα.



.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

15) Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) να φέρετε ΑΔ ⊥ ΑΒ και ΑΕ ⊥ ΑΓ. Αν είναι ΑΔ = ΑΕ, να αποδείξετε ότι ΒΔ = ΓΕ.



.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

16) Σε τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι $\hat{B} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ και ΑΒ = ΑΔ.

Να αποδείξετε ότι ΒΓ = ΓΔ και ότι η ΑΓ είναι μεσοκάθετος του ΒΔ.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

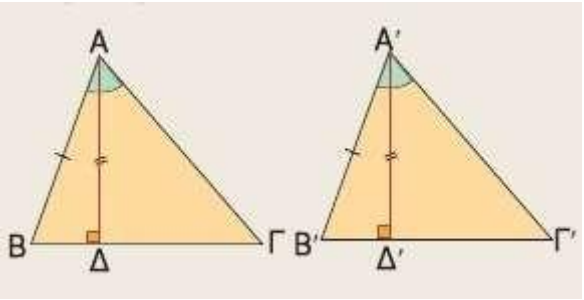
17) Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$ = 90º) να φέρετε τη διχοτόμο ΒΔ.Αν ΔΕ⊥ΒΓ, να αποδείξετε ότι ΑΒ = ΒΕ.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

18) Μια ευθεία (ε) διέρχεται από το μέσον Μ ενός τμήματος ΑΒ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β ισαπέχουν από την ευθεία (ε).

.....
.....
.....

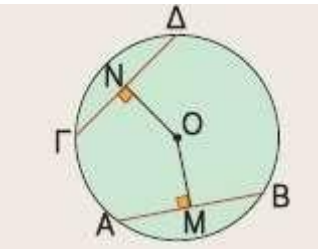
19) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν $\hat{A} = \hat{A}'$ και ΑΒ = Α΄Β΄. Αν ταύψη τους ΑΔ και Α΄Δ΄ είναι ίσα, να αποδείξετε ότι .



α) $\hat{B} = \hat{B}'$

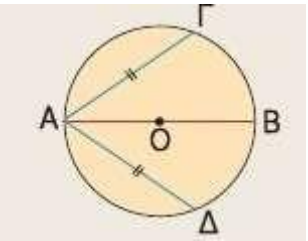
β) τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα.

20) Αν οι χορδές ΑΒ, ΓΔ ενός κύκλου είναι ίσες, να αποδείξετε ότι και τα αποστήματά τους ΟΜ, ΟΝ είναι ίσα και αντιστρόφως.



.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

21) Στο διπλανό σχήμα η ΑΒ είναι διάμετρος του κύκλου. Αν οι χορδές ΑΓ και ΑΔ είναι ίσες, να αποδείξετε ότι και οι χορδές ΒΓ και ΒΔ είναι ίσες.



.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Επιπλέον Ασκήσεις Για Εξάσκηση

1) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ ισοσκελές (ΑΒ = ΑΓ). Αν ΒΚ και ΓΛ είναι αντίστοιχα οι διχοτόμοι των γωνιών Β και Γ, να δείξετε ότι ΒΚ = ΓΛ .

Λύση

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

2) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ ισοσκελές (ΑΒ = ΑΓ) και η διχοτόμος ΑΔ . Να δείξετε ότι κάθε σημείο της διχοτόμου ΑΔ, ισαπέχει από τα άκρα της βάσης ΒΓ .

Λύση

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

3) Να δείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ισοσκελούς τριγώνου, σχηματίζουν ισοσκελές τρίγωνο .

Λύση

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

4) Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΓ κατά ΓΔ, την ΓΑ κατά ΑΕ και την ΑΒ κατά ΒΖ, ώστε ΓΔ = ΑΕ = ΒΖ .Να δείξετε ότι το ΕΖΔ είναι ισόπλευρο .

Λύση

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

5) Στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε ημιευθείες Αχ και Αψ κάθετες, αντίστοιχα στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ έτσι ώστε οι γωνίες Βαχ και ΓΑψ να μην περιέχουν το τρίγωνο . Στις Αχ και Αψ παίρνουμε αντίστοιχα, τμήματα ΑΒ' = ΑΒ και ΑΓ' = ΑΓ .Να δείξετε ότι ΒΓ' = Β'Γ .

Λύση

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

6) Δυο ευθείες ε1 και ε2 τέμνονται στο σημείο Ρ. Στην ε1 παίρνουμε τα σημεία Κ και Λ έτσι ώστε ΡΚ = ΡΛ και στην ε2 τα σημεία Μ και Ν έτσι ώστε ΡΜ = ΡΝ .Να δείξετε ότι ΚΝ = ΜΛ και ΚΜ = ΝΛ .

Λύση

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

7) Θεωρούμε γωνία χΟψ και δυο σημεία Α και Β των πλευρών Οχ και Οψ αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΟΑ = ΟΒ. Έστω Μ ένα οποιοδήποτε σημείο της διχοτόμου Οδ της γωνίας χΟψ. Να δείξετε ότι:

α) ΜΑ=ΜΒ

β) Επίσης προεκτεινόμενες οι ΑΜ και ΜΒ τέμνουν τις πλευρές Οψ και Οχ στα Α΄και Β΄ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι ΑΑ΄=ΒΒ΄

Λύση

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

8) Δίδεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΜ. Προεκτείνουμε την ΑΜ κατά ΜΔ=ΑΜ. Να δείξετε ότι ΓΔ=ΑΒ.

Λύση

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

9) Δίδεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Από το μέσο Μ της ΑΒ φέρνω ΜΔ και ΜΓ. Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΜΓ και ΜΔ είναι ίσα.

Λύση

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

10) Δίδεται γωνία χΟψ. Να δείξετε ότι κάθε σημείο της διχοτόμου Οδ της γωνίας, ισαπέχει από τις πλευρές της.

Λύση

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

11) Δίδεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και Δ,Ε τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα

α) από τα Δ,Ε να φέρετε τις αποστάσεις ΔΖ και ΕΗ από την βάση ΒΓ. Να δείξετε ότι ΔΖ=ΕΗ .

β) στη συνέχεια να φέρετε τις αποστάσεις ΔΛ και ΕΚ από τις πλευρές ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι ΔΛ=ΚΕ.

Λύση

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

12) Να αποδείξετε ότι οι κορυφές Β,Γ τριγώνου ισαπέχουν από τη διάμεσο ΑΜ.

Λύση

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

13) Δίδεται κύκλος (Κ,ρ). Να φέρετε δύο διαμέτρους του ΑΑ΄ και ΒΒ΄. Να δείξετε ότι ΑΒ=Α΄Β΄.

Λύση

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

<u>14)</u> Δίδεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και το ύψος του ΑΔ. Αν Μ τυχαίο σημείο του ΑΔ, να αποδείξετε ότι

α) ΜΒΑ = ΜΓΑ

Β) Το τρίγωνο ΒΜΓ είναι ισοσκελές.

<u>Λύση</u>

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....