

1.6 ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

Παραδείγματα

$$1. \quad x\psi + x\omega = \quad 2. \quad 3x - 3\omega = \quad 3. \quad x\psi\omega + x\kappa\omega = \quad 4. \quad 3x - 6\psi = 5. \quad 6x - 8\psi =$$

$$6. \quad x^2 - 3x = \quad 7. \quad x^2 + 3x = \quad 8. \quad x^2 + x = \quad 9. \quad 2x^3 + 4x^2 = \quad 10. \quad 6x^3 - 15x^2 =$$

$$xy + xz = x(y+z)$$

$$6x^3 - 15x^2 = 3x^2(2x-5)$$

$$2x^3 + 4x^2 = 2x^2(x+2)$$

Ομαδοποίηση

$$\text{Εφαρμογή της επιμεριστικής ιδιότητας : } ax+ay+bx+by = (a+b)(x+y)$$

(Ομαδοποίηση) Χωρίζοντας τους όρους του πολυωνύμου σε ομάδες (πολυώνυμα) με ίσο πλήθος όρων, βλέπουμε πολλές φορές ότι, αν βγάλουμε από τους όρους κάθε ομάδας τους κοινούς παράγοντες τους εκτός παρένθεσης, εμφανίζεται το ίδιο πολυώνυμο μέσα στις παρενθέσεις όλων των ομάδων. Τότε το πολυώνυμο των παρενθέσεων είναι κοινός παράγοντας όλων των ομάδων και μπορεί να γραφεί μπροστά από μια νέα παρένθεση. (Η δυσκολία στην περίπτωση αυτή είναι να διακρίνουμε την κατάλληλη ομαδοποίηση των όρων).

$$3x + 3\omega + ax + a\omega = 3(x+\omega) + a(x+\omega) = (x+\omega)(3+a)$$

$$a^2 - x^2 + 2x - 1 = a^2 - (x^2 - 2x + 1) = a^2 - (x-1)^2 = (a-x+1)(a-x-1)$$

ταυτότητες : Αν το άθροισμα αποτελείται από 3 όρους, ελέγχουμε αν οι δύο είναι τετράγωνα κάποιων αριθμών και ο τρίτος είναι το διπλάσιο γινόμενό τους

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{και} \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Παραδείγματα

$$x^2 - 4x + 4 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 = (x - 2)^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \quad \text{(Διαφορά τετραγώνων)}$$

Αν το άθροισμα αποτελείται από 2 όρους και δεν έχει κοινό παράγοντα, τότε ίσως να γίνεται εφαρμογή αυτής της ταυτότητας, μετά από κάποια ενδεχόμενη τροποποίηση.

Παραδείγματα

$$(4x^2 - 9) = (2x)^2 - 3^2 = (2x-3)(2x+3)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΜΠΕΔΩΣΗΣ

Ασκήσεις εμπέδωσης στον κοινό παράγοντα

Παραγοντοποίηση Κοινός Παράγοντας

Να μετατραπούν σε γινόμενα πρώτων παραγόντων οι παραστάσεις:

α. $2a\beta - 2a\delta$ β. $8x^2 - 4x$ γ. $12x^2y + 6xy^2 - 3xy$

Να μετατραπούν σε γινόμενα πρώτων παραγόντων οι παραστάσεις:

α. $\beta(x+2y) + \gamma(x+2y)$ β. $2a^2\beta(x+y) - 4a\beta^2(x+y)$

γ. $3a(\kappa-3\lambda) + 6a\beta(\kappa-3\lambda) + 12a^2\beta(\kappa-3\lambda)$

δ. $(x+y)^3 - (x+y)^2$ ε. $a(x-y) + \gamma(y-x)$

στ. $2a(\gamma-2\delta) + 2a\beta(2\delta-\gamma) - 4a^2(\gamma-2\delta)$

ζ. $a(x+y) + \beta(x+y) - (a-\beta)(x+y)$

η. $(x-2)(x-1)^2 - 4(2-x)$ θ. $2a(a-2\beta) + a - 2\beta$

Στα παρακάτω πολυώνυμα να βγάλετε κοινό παράγοντα τον ΜΚΔ των συντελεστών των όρων τους.

$$2a^5 - 10 \quad 24\kappa - 16\lambda$$

$$15 + 20\mu \quad 220\omega^2 + 33t^3$$

$$3x^2 - 9x + 12 \quad 14 + 49\beta + 70\alpha$$

$$4\rho - 6\rho^3 + 826\mu^2 - 39\nu$$

Να κάνετε παραγοντοποίηση τα παρακάτω πολυώνυμα .

$6ax + 3a$	$2a^5 - 10a$
$24\kappa^2\lambda - 16\kappa\lambda^2$	$15\mu^2 + 20\mu$
$220\omega^2 + 33\omega^3$	$3x^2 - 9x + 12x^3$
$14a^2 + 49a\beta + 70a\beta^3$	$4\nu\rho - 6\nu^2\rho^3 + 8\rho^2\nu$
$26\mu^2 - 39\mu$	$25z^2 - 75z$
$a^2 - a$	$a^3 - a^2 - a$

Ομαδοποίηση

1. Να μετατραπούν σε γινόμενα πρώτων παραγόντων οι παραστάσεις:

α. $2x + 2y + ay + ax$	β. $a^2 - 4a + ay - 4y$
γ. $a^2y^2 - ay\delta + a\beta\gamma - \beta\delta$	δ. $5ax - 4\beta y + 5ay - 4\beta x$
ε. $4ay - 2\beta y + 2a\omega - \beta\omega$	στ. $x^3 - 5x^2 + 2x - 10$
ζ. $x^3 + 7x^2 + 3x + 21$	η. $7a\beta + 7a\gamma - 9\beta\delta - 9\gamma\delta$
θ. $a\beta x - a\beta y - a\gamma x + a\gamma y$	ι. $5x^3 + x^2 - 20x - 4$
ια. $x^3 + 3x^2 - 16x - 48$	ιβ. $x^3 + x^2 - 4x - 4$
ιγ. $\beta x - a\beta + x^2 - ax$	ιδ. $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5$
ιε. $a^5 - a^4 - 2a^3 + 2a^2 + a - 1$	ιστ. $ax - 2ay - \beta x + 2\beta y + \gamma x - 2\gamma y$
ιζ. $a\beta(x^2 + y^2) + xy(a^2 + \beta^2)$	ιη. $ax^\nu + ay^\mu + \beta x^\nu + \beta y^\mu$

2. Να παραγοντοποιήσετε ης παραστάσεις:

α) $ax + \beta y + \beta x + ay$ **β)** $ax - \beta y - ay + \beta x$ **γ)** $ax + \beta y - ay - \beta x$
δ) $ax - \beta y + ay - \beta x$ **ε)** $2\gamma a + \delta\beta + \delta a + 2\gamma\beta$ **στ)** $3ay - 2\beta x + 3ax - 2\beta y$

3. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $x^2 + xy + x\omega + y\omega$ **β)** $a^2 + 2a + a\beta + 2\beta$ **γ)** $a^2 + ay + 4a + 4y$ **δ)** $2a + 2x + ax + x^2$
ε) $3x - 3y + xy - x^2$ **στ)** $a\beta - \beta x - ax + x^2$

4. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $y^2 + ay + \beta y + a\beta$ **β)** $3x^3 - 7x^2 + 3x - 7$ **γ)** $6x^2 + 3\lambda^2x + 8\lambda x + 4\lambda^3$ **δ)** $7a\beta + 7a\gamma - 9\delta\beta - 9\delta\gamma$
ε) $5\gamma x - 8\gamma y + 5\beta x - 8\beta y$ **στ)** $21ax + 35ay + 20y + 12x$ **ζ)** $2\mu x + \nu x + 2\mu y + \nu y$ **η)** $ax - 2ay - \beta x + 2\beta y$ **θ)** $2a^2 + 3a\beta - 2a\gamma - 3\beta\gamma$ **ι)** $a\gamma^2 + \beta + \beta\gamma^2 + a$ **ια)** $a\gamma^2 - 2a - \beta\gamma^2 + 2\beta$

5. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $x^3 - x^2 + x - 1$ **β)** $2a^3 + 3 + 2a + 3a^2$ **γ)** $\beta x - a\beta + x^2 - ax$ **δ)** $3ax - ay - 3\beta x + \beta y$ **ε)** $6x^2 - 4ax - 9\beta x + 6a\beta$ **στ)** $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$ **ζ)** $x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x$ **η)** $a^4 - 3a^3 + 2a^2 - 6a$

6. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

- α) $ax^3 + ay^2x + bx^3 + by^2x$ β) $55x^4y + 77x^3y^3 - 25x^2y^2 - 35xy^4$ γ) $a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1$ δ) $a^5 - a^4 + a^3 - a^2 + a - 1$ ε) $5x^3y + 10xy^3 + 5xy - 2x^2 - 4y^2 - 2xy$

Διαφορά Τετραγώνων

7. Να γίνουν γινόμενο οι παραστάσεις:

α. $a^2 - 16$

β. $x^2 - 9$

γ. $25 - x^2$

δ. $36x^4 - 121y^2$

ε. $\frac{49}{64}x^2 - 9$

στ. $81x^4 - 16y^4$

ζ. $16a^2b^2 - 25$

η.

θ. $3x^{v+2} - 12x^v$

η. $a^4 - b^4$

θ. $a^8 - b^8$

ι. $a^{2v} - b^{2v}$

ια. $(2x - 3)^2 - 16$

ιβ. $25 - (a + 7b)^2$

ιγ. $(x - 3y)^2 - (-x + 2y)^2$

ιδ. $25(x - 1)^2 - 4$

ιε. $(x - 8y)^2 - 49(x + 1)^2$

ιστ. $\frac{1}{4}x^2 - (x - y)^2$

Τέλειο Τετράγωνο

8. α. $x^2 + 2x + 1$

β. $x^2 - 4x - 4$

γ. $\kappa^2 - 2\kappa\lambda + \lambda^2$

δ. $4a^2 + 12a + 9$

ε. $16x^2 + 40xy + 25y^2$

στ. $49a^2 - 14a\beta + \beta^2$

ζ. $25\kappa^2 - 60\kappa\lambda + 36\lambda^2$

η. $a^2\beta^2 - 14a\beta + 49$

θ. $x^6 - 2x^3 + 1$

ι. $x^4 - 4x^2y^2 + 4y^4$

ια. $x^2 + x + \frac{1}{4}$

ιβ. $\frac{a^2}{16} + \frac{a\beta}{4} + \frac{\beta^2}{4}$

ιγ. $a^2 - \frac{2}{3}a + \frac{1}{9}$

ιδ. $\frac{4}{9}a^2 + \frac{1}{3}a + \frac{1}{4}$

ιε. $100a^2 + \frac{45}{2}a + \frac{81}{64}$

ιστ. $(a - 3)^2 - 6(a - 3) + 9$

9. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $x^2 - 4x + 4 - y^2$ β) $a^2 + \beta^2 + 2a\beta - \gamma^2$ γ) $x^2 - 9 - 2xy + y^2$ δ) $a^2 - \beta^2 - \gamma^2 + 2\beta\gamma$ ε) $x^2 - y^2 - 6x - 9$

στ) $9x^2 - 36y^2 - 30x + 25$

Τριώνυμο

10. α. $x^2 + 6x - 7$

β. $x^2 - 3x - 2$

γ. $x^2 - 7x - 30$

δ. $x^2 - 5x + 6$

ε. $x^2 + 5x + 4$

στ. $x^2 + 3x - 18$

Συνδυαστικές & Άλλες

11. Να γίνουν γινόμενο οι παραστάσεις:

α. $a\beta^2 - \alpha\gamma^2$

β. $x^4 - 64x^2y^2$

γ. $x^3 - x(y-z)^2$

δ. $x^3y - xy^3$

ε. $x^3 - 9x$

στ. $2x^3 - 18xy^2$

ζ. $5a^3 - 5ax^2$

η. $81x^4 - 16y^4$

θ. $3x^{v+2} - 12x^v$

12. Να γίνουν γινόμενο οι παραστάσεις:

α. $x^2 - 4y^2 - x - 2y$

β. $ax^2 + \beta y^2 - \alpha y^2 - \beta y^2$

γ. $x^3 - x^2y - xy^2 + y^3$

δ. $\alpha x^2 - \beta x^2 - \alpha - \beta$

ε. $a^2 - \beta^2 - \alpha - \beta$

στ. $3x^3 + 6x^2 - 9x$

ζ. $x^{2v+1} - xy^2$

η. $9x^{2v+2} - 4y^{2v+2}$

θ. $x^2 - y^2 + \omega^2 + 2x\omega$

ι. $x^2 - y^2 - 2\alpha y - \alpha^2$

ια. $x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 2y + 1$

ιβ. $4a^2 - 4a\beta + \beta^2 - 9a^2\beta^2$

ιγ. $1 - x^2 + 2xy - y^2$

ιδ. $a^2 + x^2 - \beta^2 - y^2 - 2ax + 2\beta y$

13. Ομοίως:

α. $(a^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2 - 4a^2\beta^2$

β. $(3x-1)(x+1)^2 - 9(3x-1)$

γ. $(x^2+3)^2 - 16x^2$

δ. $(a^2 + \beta^2)^2 - 4a^2\beta^2$

ε. $(x^2-4)^2 - (3x-2)(x+2)^2$

στ. $(a^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2 - 9a^2\beta^2$

14. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2 + x = 0$ β) $2x^2 + 6x = 0$ γ) $3x - 7(x^2 - x) = (5 - 4x)x$ δ) $3x^2 - 12x = 0$

ε) $3x^2 = 9x$ στ) $4x^2 = -24x$ ζ) $6x^2 = 42x$ η) $3x^2 - 5x = x^2 - 3x$ θ) $x^2 + 6x = 4x^2 - 9x$ ι) $-8x^2 + 5x = -12x^2 + x$ ια) $5(x^2 - 3x) = 4x(x - 2)$ ιβ) $11x(5 - 4x) = 7(5x - 6x^2)$ ιγ) $5x - 4x(x - 3) = x^2 - 2(x^2 - x)$ ιδ) $2x^2 - 7x = 3x - 3x^2$

15. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $a^2 + \beta^2 + 2a\beta - 2a - 2\beta$

β) $x^2 + y^2 - x + y - 2xy$ γ) $4a^2 - 6a + \beta^2 - 3\beta + 4a\beta$

16. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $x^3 + 6x^2 + 9x$ β) $4a^3 + 4a^2 + a$ γ) $3x^3y + 3xy^3 + 6x^2y^2$ δ) $18\beta^4 - 24\beta^3 + 8\beta^2$ ε) $a^4 - 2a^2\beta^2 + \beta^4$ στ) $x^8 - 2x^4y^4 + y^8$

17. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $(x+y)^2 + 9(x+y) + 14$ β) $(a+\beta)^2 - 3(a+\beta) - 28$ γ) $2(\lambda-\mu)^2 - 14(\lambda-\mu) + 24$ δ) $-(x+y)^2 - 6(x+y) + 16$

18. Να κάνετε παραγοντοποίηση τις παρακάτω παραστάσεις :

$a(x-\psi) + x^2 - \psi^2$
 $x^4 - x^2 + x + 1$

$(a-\beta)^2 + a^2 - \beta^2$
 $a\beta - \beta^2 + a^3 - \beta^3$

$$x^5 - 8x^2 + x^4 - 16$$

$$4x^4 + 8x^6 + \psi^3 - \psi^2$$

$$x^3 + x^2 + 5x + 125$$

$$\kappa^3 - 2\kappa^2 + -27\lambda^3 + 18\lambda^2$$

19.

Να κάνετε παραγοντοποίηση τις παρακάτω παραστάσεις : (Τέλεια τετράγωνα, διαφορά τετραγώνων)

$$x^2 + 2x + 1 - 9\psi^2$$

$$25a^2 - x^2 + 4x\psi - 4\psi^2$$

$$49x^2 + 64\psi^2 - 112x\psi - \psi^4$$

$$\gamma^2 - a^2 - 2a\beta - \beta^2$$

$$x^2 + 6x\psi + 9\psi^2 - (9x^2 - 6x\psi + \psi^2)$$

20. Να κάνετε παραγοντοποίηση τις παρακάτω παραστάσεις, .

$$2x(2x^2 - 4) + x^3 - 2x$$

$$(a + 1)(a - 1) - (a - 1)(a^2 + a + 1)$$

$$(x + \psi)^3 - x^3 - \psi^3$$

$$x^2(x + 6) - x^3 - 8x$$

$$(a + \beta)^3 - a(a - \beta)^2 - \beta(\beta - a)^2$$

$$(2x + 1)^2 - x(x - 2) - 1$$

$$(2a + 3\beta)(2a - 3\beta) - 4a(2a - 3\beta)$$

$$(a + \beta)^2 - a(a - \beta)$$

$$(a - \beta)^2 - \beta(a + \beta)$$

$$(a + \beta)^2 - (\beta + \gamma)^2 - (a - \gamma)(a + \gamma)$$

21. Να κάνετε παραγοντοποίηση τις παρακάτω παραστάσεις:

$$x(x + 3) + 2(x + 3)$$

$$x^3(x + 1) - x(x + 1)$$

$$a(x + \psi) + \beta(x + \psi)$$

$$x(a - \beta) + \psi(\beta - a)$$

$$(x - 1)(x - 2) - (1 - x)(2x + 1)$$

$$(2\psi + 2)(\psi - 6) - (3\psi + 3)(2 - \psi)$$

$$(a - \beta)^3 + (a - \beta)$$

$$x(x - a)^2(x + 2a) - x^2(x - a)(x + 2a)^2$$

$$a^2(a - \beta)\beta^3 + a(a - \beta)^2\beta$$

$$(x + \psi + 1) + (x + \psi + 1)x + (x + \psi + 1)\psi$$

22. Να κάνετε παραγοντοποίηση τις παρακάτω παραστάσεις : «Ομαδοποίηση»

$$2a + 4a\beta + 6\beta + 3$$

$$a\beta - \beta\gamma + xa - x\gamma$$

$$a^3\beta^2\gamma + a^2\beta\gamma + 2a\beta + 2$$

$$4x^2\psi + 10x - 6x\psi^2 - 15\psi$$

$$a\beta + \beta x + a + \gamma a + \gamma x + x$$

$$x^2 - x - \psi x + \psi + \omega - \omega x$$

$$x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 12x^2 - x + 4$$

$$a^3 + a^2 + (a + 1)(a + 2)$$

$$a\beta + \beta\gamma + a\gamma + \gamma^2 + (\beta + \gamma)(a + \beta)$$

$$x^2 + (a + \beta)x + a\beta$$

23. Να κάνετε παραγοντοποίηση τις παρακάτω παραστάσεις :

$$x^2 - (x + 3\psi)^2$$

$$(a + \beta)^2 - (\beta + \gamma)^2$$

$$(5x + 3\psi)^2 - (3x + 5\psi)^2$$

Γενικές παρατηρήσεις στην παραγοντοποίηση.

- Για να παραγοντοποιήσετε ένα πολυώνυμο **πρώτα θα εξετάσετε αν υπάρχει κοινός παράγοντας από όλους τους όρους**. Τον παράγοντα αυτό, αν υπάρχει, τον βγάζετε έξω από την παρένθεση. Ύστερα θα εξετάσετε αν το πολυώνυμο μέσα στη παρένθεση παραγοντοποιείται με μια από τις άλλες περιπτώσεις που ακολουθούν.
- Αν ένα πολυώνυμο έχει δυο όρους, είναι πολύ πιθανόν να είναι διαφορά τετραγώνων ή άθροισμα κύβων ή διαφορά κύβων.
- Αν ένα πολυώνυμο έχει τρεις όρους έχει μεγάλη πιθανότητα να είναι τετράγωνο αθροίσματος ή διαφοράς ή τριώνυμο.
- Αν ένα πολυώνυμο έχει τέσσερις όρους τότε είναι πιθανόν να γίνεται παραγοντοποίηση κατά ομάδες.
- Αν ένας όρος βγαίνει ολόκληρος κοινός παράγοντας, χωρίς το πρόσημο του, στη θέση του μένει το +1 ή το -1 ανάλογα με το πρόσημο του όρου
π.χ $a^3 - 3a^2 + a = a(a^2 - 3a + 1)$ ή $x\psi - \psi = \psi(x - 1)$.
- Μπορούμε να κλείσουμε δυο αριθμούς σε παρένθεση με το πλην μπροστά, αρκεί να αλλάξουμε το πρόσημο τους δηλαδή $a - \beta = -(-a + \beta)$ ή καλύτερα $a - \beta = -(\beta - a)$ και $-a - \beta = -(a + \beta)$. Αυτή η παρατήρηση είναι πολύ χρήσιμη στη παραγοντοποίηση όπως φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα:

$$x^2 - \psi^2 + \psi - x = (x - \psi)(x + \psi) - (x - \psi) = (x - \psi)(x + \psi - 1)$$

Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου – Παραγοντοποίηση Αλγεβρικών παραστάσεων

- Μερικές παραγοντοποιήσεις γίνονται αν προσθέσουμε και αφαιρέσουμε στο πολυώνυμο ένα κατάλληλο μονώνυμο
π.χ. $4a^4 + \beta^4 = (2a^2)^2 + (\beta^2)^2 + 4a^2\beta^2 - 4a^2\beta^2 = (2a^2 + \beta^2)^2 - (2a\beta)^2 = (2a^2 + \beta^2 - 2a\beta)(2a^2 + \beta^2 + 2a\beta)$.
- Μερικές παραγοντοποιήσεις γίνονται αν διασπάσουμε κάποιον όρο του πολυωνύμου σε άθροισμα ή διαφορά δύο άλλων
π.χ. $x^4 - 5x^2\psi^2 + 4\psi^4 = x^4 - 4x^2\psi^2 - x^2\psi^2 + 4\psi^4 = (x^2 - 2\psi^2)^2 - (x\psi)^2 = (x^2 - 2\psi^2 - x\psi)(x^2 - 2\psi^2 + x\psi)$ εδώ διασπάσαμε το $-5x^2\psi^2$ σε $-4x^2\psi^2 - x^2\psi^2$.
- Άθροισμα τετραγώνων δεν αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Στα παρακάτω πολυώνυμα να βγάλετε κοινό παράγοντα τον ΜΚΔ των συντελεστών των όρων τους.

i) $2a^5 - 10$	ii) $24\kappa - 16\lambda$
iii) $15 + 20\mu$	iv) $220\omega^2 + 33t^3$
v) $3x^2 - 9x + 12$	vi) $14 + 49\beta + 70\alpha$
vii) $4\rho - 6\rho^3 + 8$	viii) $26\mu^2 - 39\nu$

2. Να κάνετε παραγοντοποίηση τα παρακάτω πολυώνυμα.

i) $6ax + 3a$	ii) $2a^5 - 10a$	iii) $24\kappa^2\lambda - 16\kappa\lambda^2$
iv) $15\mu^2 + 20\mu$	v) $220\omega^2 + 33\omega^3$	vi) $3x^2 - 9x + 12x^3$
vii) $26\mu^2 - 39\mu$	viii) $25z^2 - 75z$	ix) $a^2 - a$

3. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

i) $2a(a+\beta) - a - \beta$	ii) $(x+y) - 2x^2(x+y)$
iii) $5x(x-4) - 20x^2(4-x)$	iv) $(x+1)(x-2) - 5x(x-2)^2 - 3(x-2)$
v) $6x^2 + xy + 18xk + 3yk$	vi) $x+y - x^2 - xy$
vii) $x^2 - ax - a^2y + axy$	viii) $8x^3y - 24y^2 - 7axy + 21a$
ix) $x^3 + x^2 + x + 1$	x) $24x^4 - 2x^3 + 3x - 3$

4. Να κάνετε παραγοντοποίηση τις παρακάτω παραστάσεις:

i) $x(x+3) + 2(x+3)$	ii) $x^3(x+1) - x(x+1)$
iii) $a(x+\psi) + \beta(x+\psi)$	iv) $x(a-\beta) + \psi(\beta-a)$
v) $(x-1)(x-2) - (1-x)(2x+1)$	vi) $(2\psi+2)(\psi-6) - (3\psi+3)(2-\psi)$
vii) $(a-\beta)^3 + (a-\beta)$	viii) $x(x-a)^2(x+2a) - x^2(x-a)(x+2a)^2$
ix) $a^2(a-\beta)\beta^3 + a(a-\beta)^2\beta$	x) $(x+\psi+1) + (x+\psi+1)x + (x+\psi+1)\psi$

5. Να κάνετε παραγοντοποίηση τις παρακάτω παραστάσεις :

i) $2a + 4ab + 6b + 3$	ii) $ab - \beta\gamma + \alpha - \alpha\gamma$
iii) $a^3\beta^2\gamma + a^2\beta\gamma + 2ab + 2$	iv) $4x^2\psi + 10x - 6x\psi^2 - 15\psi$
v) $a\beta + \beta x + \alpha + \gamma a + \gamma x + x$	vi) $x^2 - x - \psi x + \psi + \omega - \omega x$
vii) $x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 12x^2 - x + 4$	viii) $a^3 + a^2 + (a + 1)(a + 2)$
ix) $a\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma + \gamma^2 + (\beta + \gamma)(\alpha + \beta)$	x) $x^2 + (a + \beta)x + a\beta$

6. Να κάνετε παραγοντοποίηση τις παρακάτω παραστάσεις :

i) $a^2\beta^2 - 4$	ii) $16x^4 - 81\psi^2$	iii) $1 - 8x^3$
iv) $64 + 125a^3$	v) $36\omega^2 - 10^4$	vi) $27a^3 - 1000$
vii) $216x^6 + \psi^3$	viii) $(\alpha + \beta)^2 - 1$	ix) $49x^2\psi^4 - 64$

7. Να μετατρέψετε σε γινόμενα τις παραστάσεις:

i) $x^2 - 16y^2$	ii) $25x^2 - 4$	iii) $81k^2 - 9x^2$
iv) $25x^2y^2 - 16$	v) $x^4 - 16y^4$	vi) $x^4 - 1$

8. Να μετατρέψετε σε γινόμενα τις παραστάσεις:

i) $(x-1)^2 - 4$	ii) $4x^2 - (x-2)^2$
iii) $9(2x-1)^2 - (3x-1)^2$	iv) $(4x+2y)^2 - (2x-3y)^2$

9. Να κάνετε παραγοντοποίηση τις παρακάτω παραστάσεις : (Τέλεια τετράγωνα)

i) $x^2 + 2x + 1$	ii) $4a^2 - 4a + 1$
iii) $25\kappa^2 + 20\kappa + 4$	iv) $a^3 - 4a^2 + 4a$
v) $18 + 12x + 2x^2$	vi) $5x^4 - 100x^2 + 500$
vii) $(\alpha + \beta)^2 + 2(\alpha\beta + \beta^2) + \beta^2$	viii) $(x + \psi + 1)^2 - 2(x + \psi + 1) + 1$
ix) $\frac{1}{4}x^{10} + x^5 + 1$	x) $x^2 - x + \frac{1}{4}$
xi) $(4x+3y)^2 - (3x+4y)^2$	xii) $9x^2 + 12xy + 4y^2$
xiii) $(2x+1)^2 + 2(2x+1) + 1$	xiv) $(x+2)^3 - 8$

10. Να κάνετε παραγοντοποίηση τις παρακάτω παραστάσεις :

i) $x^2 - (x + 3\psi)^2$	ii) $(\alpha + \beta)^2 - (\beta + \gamma)^2$
iii) $(5x + 3\psi)^2 - (3x + 5\psi)^2$	iv) $x^2 - 10x + 16$

11. Να κάνετε παραγοντοποίηση τις παρακάτω παραστάσεις :

i) $\alpha(x - \psi) + x^2 - \psi^2$	ii) $(\alpha - \beta)^2 + \alpha^2 - \beta^2$	iii) $x^4 - x^2 + x + 1$
iv) $\alpha\beta - \beta^2 + \alpha^3 - \beta^3$	v) $x^5 - 8x^2 + x^4 - 16$	vi) $x^2 + 2x + 1 - 9\psi^2$
vii)	viii) $25\alpha^2 - x^2 + 4x\psi - 4\psi^2$	$49x^2 + 64\psi^2 - 112x\psi - \psi^4$

12. Να κάνετε παραγοντοποίηση τις παρακάτω παραστάσεις :

i) $\alpha^4 + \beta^4 - 7\alpha^2\beta^2$	ii) $\alpha^4 + \beta^4 - 11\alpha^2\beta^2$
--	--

13. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

$A = x^2 - 25y^2$	$B = 12x^2 - 3$
$\Gamma = 3(\alpha - \beta) - (\alpha^2 - \beta^2)$	$\Delta = \alpha\beta - 3\alpha + 2\beta^2 - 6\beta$
$E = 21 + 4\alpha - \alpha^2$	$Z = \alpha x - 2\alpha\psi + 2\beta\psi - \beta x$
$H = 2\alpha\beta + 4\alpha - \beta - 2$	$\Theta = \alpha^3 + 1$
$I = 2\beta^2 - \beta + 2\beta\alpha - \alpha$	$K = 4x^2(y^2 - 1) + 4y^2(1 - x^2)$
$\Lambda = x^4 - x^8$	$M = x^2y^2 + xy - y^3 - x^2y$
$N = (x + y)^2 - w^2 + x + y + w$	$\Xi = x^2 - (\alpha - \beta)x - \alpha\beta$
$O = x^2 + 3xy + 2y^2 + xz + yz$	$\Pi = x^3 + x^2 - 2$
$P = 6x^2 + 5xy + y^2$	$\Sigma = 64x^4 + y^4$
$T = x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y)$	$Y = x(y^2 - z^2) + y(z^2 - x^2) + z(x^2 - y^2)$
$\Phi = x^8 - 12x^4 + 16$	$X = (x - xy)^2 + (x - xy)^4 - (1 - y)^4$
$\Psi = x^7 - x^5 - x^3 + x$	$\Omega = 4x^4 + 3x^2y^2 + y^4$