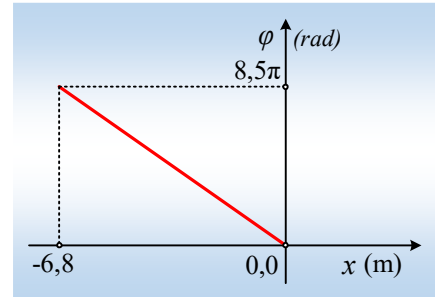


Ένα κύμα και το διάγραμμα της φάσης

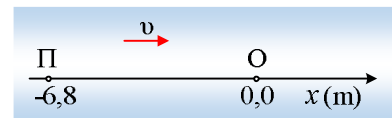
Ένα αρμονικό κύμα διαδίδεται κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου και στο διάγραμμα δίνεται η φάση της απομάκρυνσης των σημείων του μέσου τη χρονική στιγμή $t_1=3,4s$, όπου τη στιγμή $t_0=0$ ξεκίνησε η πηγή του κύματος, την ταλάντωσή της.



- i) Το κύμα αυτό διαδίδεται προς τα δεξιά ή προς τα αριστερά και γιατί;
- ii) Να βρεθεί η περίοδος και το μήκος του κύματος.
- iii) Ποια είναι η εξίσωση του κύματος, αν το πλάτος του είναι $0,2m$;
- iv) Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος την στιγμή t_1 .
- v) Να γίνει η γραφική παράσταση της φάσης της απομάκρυνσης του σημείου O, στη θέση $x=0$, σε συνάρτηση με το χρόνο.

Απάντηση:

- i) Το διάγραμμα που μας δίνεται μας δείχνει ύπαρξη φάσης στην περιοχή $-6,8m \leq x \leq 0$, πράγμα που σημαίνει ότι σε αυτήν την περιοχή έχουμε διάδοση κύματος. Αλλά η πηγή του κύματος είναι αυτή που άρχισε να



ταλαντώνεται και από κει και πέρα διαδόθηκε κύμα, το οποίο έθεσε σε ταλάντωση τα υπόλοιπα σημεία του μέσου, Συνεπώς η πηγή θα εμφανίζει και την μεγαλύτερη φάση απομάκρυνσης για την ταλάντωση που εκτελεί, ενώ όσο απομακρυνόμαστε από αυτήν η φάση θα μειώνεται. Με βάση αυτά, η πηγή βρίσκεται στη θέση $x=-6,8m$ και το κύμα που παράγεται διαδίδεται προς τα δεξιά και τη στιγμή $t_1=3,4s$ φτάνει στο σημείο O, στη θέση $x=0$.

- ii) Η φάση του σημείου O που φτάνει το κύμα είναι μηδενική, πράγμα που σημαίνει ότι αρχίζει να ταλαντώνεται χωρίς αρχική φάση. Αλλά τότε και η πηγή άρχισε να ταλαντώνεται χωρίς αρχική φάση, με εξίσωση:

$$y_{\pi} = A \cdot \eta\mu(\omega t) \quad (1)$$

Έτσι τη στιγμή t_1 έχουμε φάση $8,5\pi$, οπότε:

$$\omega t_1 = 8,5\pi \rightarrow \omega = \frac{8,5\pi}{t_1} = \frac{8,5\pi \text{ rad}}{3,4 \text{ s}} = 2,5\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \rightarrow$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2,5\pi} \text{ s} = 0,8\text{s}$$

Εξάλλου το κύμα διαδίδεται με ταχύτητα:

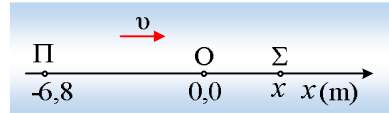
$$v = \frac{s}{t} = \frac{0 - (-6,8) \text{ m}}{3,4} = 2 \text{ m/s}$$

$$\text{Ενώ } v = \lambda \cdot f \text{ ή } \lambda = vT = 2 \cdot 0,8 \text{ m} = 1,6 \text{ m}$$

- iii) Για να βρούμε την εξίσωση του κύματος, μπορούμε να ξεκινήσουμε από την ταλάντωση της πηγής ή

οποιοδήποτε άλλου σημείου, όπως του σημείου Ο. Ας πάρουμε την πηγή Π, ως σημείο αναφοράς.

Αυτή ταλαντώνεται σύμφωνα με την εξίσωση (1), οπότε την ίδια εξίσωση απομάκρυνσης θα ακολουθεί και κάθε άλλο σημείο, με μόνη διαφορά ότι θα καθυστερήσει να τεθεί σε ταλάντωση. Έστω ότι το κύμα



φτάνει σε ένα τυχαίο σημείο Σ, τη στιγμή t' , όπου $t' = \frac{s}{v} = \frac{x - (-6,8)}{2} = \frac{x+6,8}{2}$ (S.I.), τότε η εξίσωση της απομάκρυνσης του Σ θα έχει τη μορφή:

$$y = A \cdot \eta\mu\omega(t - t') = 0,2 \cdot \eta\mu 2,5\pi \left(t - \frac{x+6,8}{2} \right) \rightarrow$$

$$y = 0,2 \cdot \eta\mu(2,5\pi t - 1,25\pi x - 8,5\pi)$$

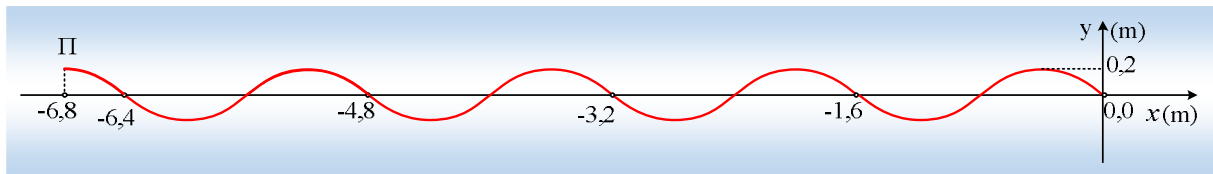
$$y = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{0,8} - \frac{x}{1,6} - 4,25 \right) \quad (\text{S.I.}) \text{ με } t \geq 0 \text{ και } x \leq 2t - 6,8 \quad (2)$$

iv) Με αντικατάσταση στην εξίσωση του κύματος $t=t_1=3,4\text{s}$ παίρνουμε:

$$y = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{0,8} - \frac{x}{1,6} - 4,25 \right) = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{3,4}{0,8} - \frac{x}{1,6} - 4,25 \right) \rightarrow$$

$$y = -0,2 \cdot \eta\mu 2\pi(1,25\pi x) \quad (\text{S.I.}) \text{ με } x \leq 0.$$

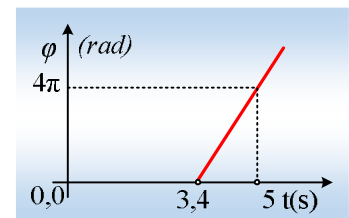
Η γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης είναι μια ημιτονοειδής καμπύλη με (χωρική) περίοδο ίση με $\lambda=1,6\text{m}$, της μορφής:



v) Για την φάση του σημείου Ο, στη θέση $x=0$ έχουμε:

$$\varphi = 2\pi \left(\frac{t}{0,8} - \frac{0}{1,6} - 4,25 \right) \rightarrow$$

$$\varphi = 2,5\pi t - 8,5\pi \quad (\text{S.I.}) \text{ με } t \geq 3,4\text{s}.$$



Η γραφική παράσταση της οποίας εμφανίζεται στο διπλανό σχήμα, όπου επιλέξαμε τη στιγμή $t=5\text{s}$ που αντιστοιχεί στην στιγμή που το σημείο Ο έχει εκτελέσει δύο ταλαντώσεις, έχοντας φάση 4π (rad).

dmargaris@gmail.com