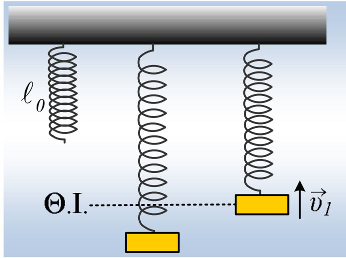
Η ενέργεια σε μια φθίνουσα ταλάντωση



Ένα σώμα Σ μάζας 2kg είναι δεμένο στο κάτω άκρο ενός κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=20N/m και εκτελεί κατακόρυφη ταλάντωση, όπως στο σχήμα, ενώ δέχεται και δύναμη απόσβεσης τη μορφής $F_{απ}=-b\cdot\upsilon$. Σε μια στιγμή t_1 περνά από τη θέση ισορροπίας του (x=0) κινούμενο προς τα πάνω με ταχύτητα υ_1=5m/s, έχοντας ταυτόχρονα και επιτάχυνση με φορά προς τα κάτω και μέτρο α_1=1m/s^2.

i) Να υπολογιστεί η σταθερά απόσβεσης b.

ii) Να βρεθούν την παραπάνω στιγμή t_1:

α) Η ενέργεια ταλάντωσης.

β) Ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας ταλάντωσης του σώματος Σ.

iii) Μετά από λίγο, τη στιγμή t_2 το σώμα Σ φτάνει στη θέση Ρ με απομάκρυνση y=1m (θετική φορά προς τα πάνω), με μηδενική ταχύτητα. Για τη στιγμή t_2, να βρεθούν η επιτάχυνση του σώματος Σ, καθώς και ο ρυθμός με τον οποίο μειώνεται η ενέργεια ταλάντωσης εξαιτίας της δύναμης απόσβεσης.

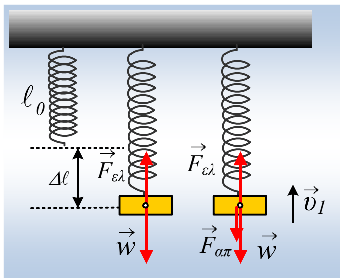
iv) Πόση είναι η μηχανική ενέργεια που εμφανίζεται ως θερμική από τη στιγμή t_1, μέχρι τη στιγμή t_2;

v) Μια άλλη χρονική στιγμή t_3 το σώμα περνά από τη θέση y_3=-0,5m κινούμενο προς τα κάτω με ταχύτητα μέτρου υ_3=3,2m/s. Για τις χρονικές στιγμές t_1, t_2, t_3 ισχύει:

α) $t_1 < t_2 < t_3$, β) $t_1 < t_3 < t_2$, γ) $t_3 < t_1 < t_2$.

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Απάντηση:



Μιλώντας για θέση ισορροπίας (η θέση x=0), εννοούμε τη θέση εκείνη, στην οποία το σώμα ισορροπεί, όταν αφεθεί, χωρίς ταχύτητα ή αν προτιμάτε η θέση που τελικά το σώμα θα ηρεμήσει, αφού ολοκληρωθεί η φθίνουσα ταλάντωσή του. Στη θέση αυτή θα ισχύει:

$$\Sigma F=0 \to \ F_{ελ}=w \to k\Delta\ell = mg \to \Delta\ell = \frac{mg}{k} = \frac{2\cdot 10}{20}m = 1m$$

i) Αφού το σώμα τη στιγμή t_1 το σώμα περνά από τη θέση x=0 κινούμενο προς τα πάνω, θα ισχύει:

$$\Sigma F=m\cdot\alpha_1 \to -b\upsilon_1=m\cdot\alpha_1 \to b=-\frac{ma_1}{\upsilon_1}=-\frac{2\cdot(-1)}{5}kg/s=0,4kg/s$$

ii) Τη στιγμή t_1, το σώμα περνά από τη θέση ισορροπίας όπου η δύναμη επαναφοράς είναι μηδενική ($F_{επ}$=-Dx=0). Ισοδύναμα μπορούμε αν θέλουμε να μιλάμε για τη συνισταμένη βάρους και δύναμης ελατηρίου, πράγμα που δεν θα προτιμήσουμε στα παρακάτω, μένοντας στην δύναμη επαναφοράς.

α) Στη θέση αυτή η δυναμική ενέργεια που συνδέεται με τη δύναμη επαναφοράς, είναι μηδενική, οπότε η ενέργεια βρίσκεται με τη μορφή της κινητικής ενέργειας:

$$E_1 = U_1 + K_1 = 0 + \frac{1}{2} m\upsilon_1^2 = \frac{1}{2} 2 \cdot 5^2 J = 25J$$

β) Για το ρυθμό μεταβολής τη ενέργειας ταλάντωσης τη στιγμή t_1 ισχύει:

$$\frac{dE_1}{dt} = \frac{dU_1}{dt} + \frac{dK_1}{dt}$$

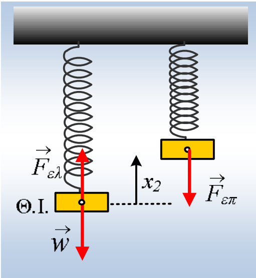
Όπου:

$$\frac{dU_1}{dt} = -\frac{dW_{F_{\varepsilon\pi}}}{dt} = -\frac{|F_{\varepsilon\pi}| \cdot |dx| \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha}{dt} = |F_{\varepsilon\pi}| \cdot |\upsilon| \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha = 0 \quad (1)$$

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = \frac{|\Sigma F| \cdot |dx| \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha}{dt} = |\Sigma F| \cdot |\upsilon| \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha = -b\upsilon^2 \quad (2) \rightarrow$$

$$\frac{dE_1}{dt} = -b\upsilon^2 = -0{,}4 \cdot 5^2 J/s = -10J/s$$

iii) Τη στιγμή t_2 που το σώμα φτάνει στην ακραία θέση με μηδενική ταχύτητα, μηδενίζεται και η δύναμη απόσβεσης, οπότε η μόνη δύναμη που δέχεται είναι η δύναμη απόσβεσης $F_{\alpha\pi}$=-Dx=-kx, οπότε από το 2ο νόμο του Νεύτωνα παίρνουμε:



$$\Sigma F = m \cdot \alpha_2 \rightarrow -kx_2 = m \cdot \alpha_2 \rightarrow$$

$$a_2 = -\frac{kx_2}{m} = -\frac{20 \cdot 1}{2} m/s^2 = -10m/s^2.$$

Σημείωση: Αν προσέξουμε την απομάκρυνση, θα δούμε ότι το ελατήριο έχει αποκτήσει το φυσικό μήκος του, οπότε δύναμη επαναφοράς είναι το βάρος, το οποίο προκαλεί επιτάχυνση g…

Όσον αφορά για το ρυθμό μεταβολής της ενέργειας, αφού υ=0, θα έχουμε από τις σχέσεις (1) και (2):

$$\frac{dU_2}{dt} = |F_{\varepsilon\pi}| \cdot |\upsilon| \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha = 0 \quad \text{και} \quad \frac{dK_2}{dt} = |\Sigma F| \cdot |\upsilon| \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha = 0, \text{ οπότε και}$$

$$\frac{dE_2}{dt} = 0$$

Πράγμα αναμενόμενο, αφού τη στιγμή αυτή η δύναμη απόσβεσης είναι μηδενική, συνεπώς η ενέργεια ταλάντωσης δεν μεταβάλλεται (στιγμιαία).

iv) Τη στιγμή t_1 υπολογίσαμε ότι η ενέργεια ταλάντωσης είναι ίση με $E_1 = 25J$.

Η αντίστοιχη ενέργεια ταλάντωσης τη στιγμή t_2 είναι ίση:

$$E_2 = \frac{1}{2} D y_2^2 = \frac{1}{2} 20 \cdot 1^2 J = 10J$$

Αλλά τότε, από την διατήρηση της ενέργειας, προκύπτει ότι έχουμε απώλεια ενέργειας (η οποία εμφανίζεται ως θερμική) ίση με:

$$Q_{θερμ}=E_1-E_2=25J-10J=15J.$$

v) Τη στιγμή t_3 η ενέργεια ταλάντωσης είναι ίση:

$$E_3 = U_3 + K_3 = \frac{1}{2}ky_3^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_3^2 = \frac{1}{2}20 \cdot 0,5^2\,J + \frac{1}{2}2 \cdot 3,2^2\,J = 12,74J$$

Με σύγκριση με τις ενέργειες ταλάντωσης τις στιγμές t_1 και t_2 παρατηρούμε ότι αρχικά έχουμε ενέργεια ίση με 25J, η οποία μειώνεται, αφού αφαιρείται από το σώμα, μέσω του έργου της δύναμης απόσβεσης, μετατρεπόμενη σε θερμική ενέργεια. Έτσι τη στιγμή t_3 η ενέργεια έχει μειωθεί στην τιμή E_3=12,74J ενώ η απώλεια συνεχίζεται, για να φτάσουμε τη στιγμή t_2, στην τιμή E_2=10J. Άρα για τις χρονικές στιγμές ισχύει:

$$t_1 < t_3 < t_2.$$

Σωστό το β).

dmargaris@gmail.com