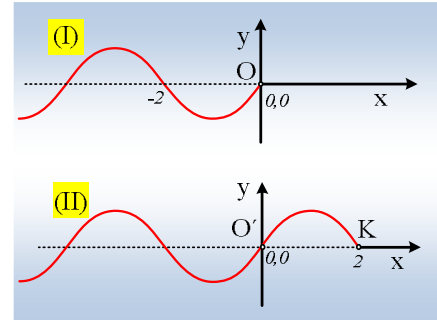


Δυο κύματα με την ίδια εξίσωση κύματος.

Κατά μήκος δύο γραμμικών ελαστικών μέσων και από αριστερά προς τα δεξιά (θετική κατεύθυνση) διαδίδονται δύο αρμονικά κύματα με το ίδιο πλάτος $A=0,2\text{m}$ και την ίδια ταχύτητα διάδοσης $v=2\text{m/s}$. Τη στιγμή $t_0=0$, το πρώτο κύμα (I) φτάνει στο σημείο O, στη θέση $x=0$, ενώ το δεύτερο (II) στο σημείο K, στη θέση $x=2\text{m}$, όπως παρουσιάζονται στο διπλανό σχήμα.



- i) Να υπολογιστεί η περίοδος ταλάντωσης των σημείων των δύο μέσων.
- ii) Ποια η εξίσωση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο, για την ταλάντωση που πρόκειται να ξεκινήσουν τα σημεία O και K, στα οποία φτάνουν τα δύο κύματα, με δεδομένο ότι η προς τα πάνω κατεύθυνση θεωρείται θετική;
- iii) Να βρεθούν οι εξισώσεις των δύο κυμάτων.
- iv) Ποια η εξίσωση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο, του σημείου O' στη θέση $x=0$, του δεύτερου κύματος;

Απάντηση:

- i) Με βάση την εικόνα που δίνεται και τα δυο κύματα, έχουν το ίδιο μήκος κύματος $\lambda=4\text{m}$, οπότε από την θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής, παίρνουμε:

$$v = \lambda \cdot f = \frac{\lambda}{T} \rightarrow T = \frac{\lambda}{v} = \frac{4}{2}\text{s} = 2\text{s}.$$

- ii) Το κύμα (I) φτάνει τη στιγμή $t=0$, στο σημείο O, το οποίο ξεκινά μια ταλάντωση από την θέση ισορροπίας του, κινούμενο προς τα κάτω (αρνητική κατεύθυνση), αλλά τότε η απομάκρυνσή του παρουσιάζει αρχική φάση $\phi_0=\pi$ και η εξίσωση απομάκρυνσης, παίρνει τη μορφή:

$$y_O = A \cdot \eta\mu(\omega t + \pi) = 0,2 \cdot \eta\mu(\pi t + \pi) \quad (\text{S.I.}) \text{ για } t \geq 0 \quad (1)$$

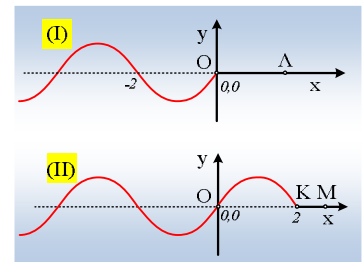
Το κύμα (II) την ίδια στιγμή φτάνει στο K, το οποίο θα κινηθεί από την θέση ισορροπίας του προς τα πάνω (θετική κατεύθυνση), οπότε δεν εμφανίζει αρχική φάση και η απομάκρυνσή του έχει εξίσωση:

$$y_K = A \cdot \eta\mu(\omega t) = 0,2 \cdot \eta\mu(\pi t) \quad (\text{S.I.}) \text{ για } t \geq 0 \quad (2)$$

- iii) Για την εύρεση της εξίσωσης του κύματος (I), έστω ένα σημείο Λ στη θέση x. Το κύμα θα καθυστερήσει να φτάσει στο σημείο Λ κατά $t_1 = \frac{d}{v} = \frac{x}{2}$, οπότε η εξίσωση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης που πρόκειται να εκτελέσει, θα έχει τη μορφή:

$$y_I = 0,2 \cdot \eta\mu(\pi t + \pi) = 0,2 \cdot \eta\mu(\pi(t - t_1) + \pi) \rightarrow$$

$$y_I = 0,2 \cdot \eta\mu\left(\pi\left(t - \frac{x}{2}\right) + \pi\right) \rightarrow$$



$$y_I = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{2} - \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{S.I.}) \text{ με } t \geq 0 \text{ και } x \leq 2t \quad (3)$$

Για την εύρεση της εξίσωσης του κύματος (II), παίρνουμε το σημείο M στη θέση x. Το κύμα θα καθυστερήσει να φτάσει στο σημείο Λ κατά $t_2 = \frac{d}{v} = \frac{x-2}{2}$, οπότε η εξίσωση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης που πρόκειται να εκτελέσει, θα έχει τη μορφή:

$$y_{II} = 0,2 \cdot \eta\mu\pi(t - t_2) = 0,2 \cdot \eta\mu\pi \left(t - \frac{x-2}{2} \right) \rightarrow$$

$$y_{II} = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{2} - \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{S.I.}) \text{ με } t \geq 0 \text{ και } x \leq 2+2t \quad (4)$$

iv) Για αν βρούμε την εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου O', της αρχής του άξονα για το κύμα (II), παίρνουμε την αντίστοιχη εξίσωση του κύματος (4) και αντικαθιστώντας $x=0$, παίρνουμε:

$$y_{O'} = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{2} - \frac{0}{4} + \frac{1}{2} \right) = 0,2 \cdot \eta\mu(\pi t + \pi) \quad (\text{S.I.}) \text{ με } t \geq -0,5\text{s.} \quad (5)$$

Σχόλια:

- Αν προσέξουμε τις δύο εξισώσεις για τα δυο κύματα, εξισώσεις (3) και (4), θα δούμε ότι έχουμε την ίδια ακριβώς εξίσωση! Και όμως υπάρχει μια διαφορά. Αυτή βρίσκεται στο **πεδίο ορισμού**. Στο κύμα (I) ισχύει για $x \leq 2t$, ενώ στο κύμα (II) ισχύει για $x \leq 2+2t$. Αν κάποιος δώσει μόνο την εξίσωση χωρίς να μας πει σε ποια περιοχή ισχύει, δεν μπορούμε να ξέρουμε για ποιο κύμα μιλάμε...
- Ας εστιάσουμε στα σημεία O και O'. Από τη στιγμή $t=0$ και πέρα, θα εκτελέσουν απολύτως όμοιες ταλαντώσεις, χωρίς καμιά διαφορά φάσης μεταξύ τους. Και τα δυο σημεία τη στιγμή $t=0$, βρίσκονται στη θέση ισορροπίας τους και κινούνται προς τα κάτω. Αυτό ακριβώς μας λέει και η σύγκριση των αντίστοιχων εξισώσεων (1) και (5). Και εδώ όμως υπάρχει διαφορά στο πεδίο ορισμού. Στο O ισχύει για $t \geq 0$, ενώ για το σημείο O' για $t \geq -0,5\text{s}$.
- Αξίζει κάποιος να εστιάσει το τι συμβαίνει στον αρνητικό ημιάξονα, τη στιγμή $t=0$. Τα δύο στιγμιότυπα είναι απολύτως όμοια! Στην πραγματικότητα το ίδιο συμβαίνει κάθε στιγμή σε όλα τα σημεία των δύο μέσων, με εξαίρεση μια μικρή περιοχή μήκους $\lambda/2$ όπου το (II) προηγείται του κύματος (I).

dmargaris@gmail.com