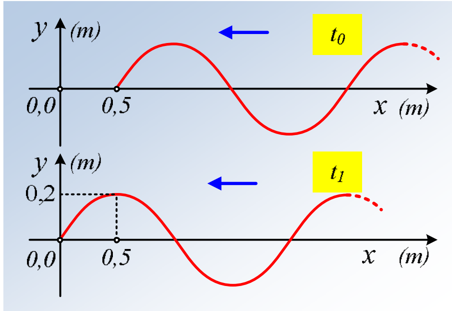
Αν το κύμα οδεύει προς τα αριστερά.



Σε γραμμικό ελαστικό μέσο και από τα δεξιά προς τ' αριστερά (προς την αρνητική κατεύθυνση) διαδίδεται ένα αρμονικό κύμα με στιγμιότυπο τη στιγμή $t_0=0$, όπως στο πρώτο από τα διπλανά διαγράμματα. Το αντίστοιχο στιγμιότυπο τη στιγμή $t_1=0{,}5s$ είναι όπως στο δεύτερο διάγραμμα.

i) Χρησιμοποιώντας πληροφορίες από τα διαγράμματα αυτά να βρείτε:

α) το πλάτος και το μήκος του κύματος,

β) τη συχνότητα και την ταχύτητα διάδοσης του κύματος.

ii) Ποια η εξίσωση του κύματος;

iii) Να σχεδιάστε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή $t_2=2{,}5s$ και μέχρι τη θέση $x_B=2{,}5m$ στον θετικό ημιάξονα.

iv) Για το σημείο Β, στη θέση $x_B=2{,}5m$:

α) Να βρεθεί η εξίσωση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο (y-t) και να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

β) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της ταχύτητας ταλάντωσης του σημείου Β, σε συνάρτηση με το χρόνο.

Απάντηση:

i) Με βάση το διάγραμμα:

α) Το πλάτος του κύματος, η μέγιστη απομάκρυνση y, από τη θέση ισορροπίας, είναι Α=0,2m.

Εξάλλου με βάση το 2ο διάγραμμα $\lambda/4=0{,}5m$ οπότε $\lambda=2m$.

β) Το σημείο στη θέση x=0,5m τη στιγμή $t_0=0$ βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του ενώ φτάνει σε ακραία θέση τη χρονική στιγμή t_1. Άρα $t_1=\frac{1}{4}T$ ή $T=4\cdot t_1=4\cdot 0{,}5s=2s$, οπότε $f=1/T=0{,}5Hz$.

Γνωρίζοντας μήκος κύματος και συχνότητα, βρίσκουμε:

$$\upsilon_\kappa=\lambda f=2\cdot 0{,}5\ m/s=1m/s.$$

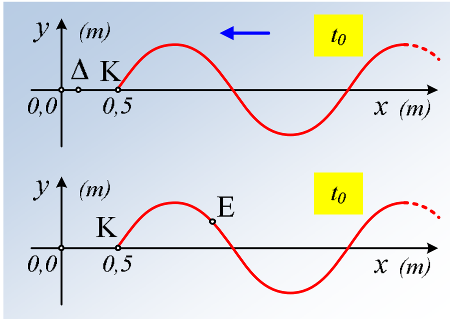
Εναλλακτικά, βλέπουμε το κύμα σε χρόνο $t_1=0{,}5s$ να έχει διαδοθεί από τη θέση 0,5m στη θέση x=0, έχοντας διανύσει **απόσταση** s=0,5m, άρα η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι ίση:

$$\upsilon_\kappa=\frac{s}{t}=\frac{0{,}5\,m}{0{,}5\ s}=1m/s$$

Αξίζει να επισημανθεί ότι η ταχύτητα του κύματος είναι **μονόμετρο** μέγεθος και δεν είναι το ίδιο μέγεθος με την ταχύτητα υλικού σημείου.

Δεν παίρνουμε τη μετατόπιση του κύματος, αλλά την **απόσταση** διάδοσης…

ii) Για να βρούμε την εξίσωση του κύματος, εστιάζουμε αρχικά στο σημείο Κ που έχει φτάσει το κύμα τη χρονική στιγμή t_0, στη θέση x_0=0,5m. Το σημείο αυτό, αρχίζει να ταλαντώνεται, από τη θέση ισορροπίας του, τη χρονική στιγμή t_0=0, κινούμενο προς θετική κατεύθυνση (προς τα πάνω). Έτσι η εξίσωση της απομάκρυνσής του δίνεται από την εξίσωση:



$$y_K = A\cdot ημ(ωt) = 0{,}2\cdot ημ\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \text{ (S.I.)}$$

Αλλά τότε αν πάρουμε ένα τυχαίο σημείο Δ, όπως στο πάνω διάγραμμα στη θέση x, το κύμα θα καθυστερήσει να φτάσει σε αυτό κατά $t_3 = \frac{d}{υ_κ} = \frac{0{,}5-x}{1}$, οπότε η εξίσωση απομάκρυνσης της ταλάντωσης που θα πραγματοποιήσει θα έχει τη μορφή:

$$y = 0{,}2\cdot ημ\left(\frac{2\pi}{T}(t-t_3)\right) = 0{,}2\cdot ημ\left(\frac{2\pi}{2}t - \frac{2\pi}{2}(0{,}5-x)\right)$$

$$\boxed{y = 0{,}2\cdot ημ2\pi\left(\frac{t}{2}+\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right) \text{ (S.I.)} \quad (1)}$$

Η εξίσωση (1) η οποία δίνει την απομάκρυνση σε συνάρτηση με χρόνο t και θέση x, αποτελεί την εξίσωση του κύματος.

Εναλλακτικά, κάποιος θα μπορούσε να πάρει σαν τυχαίο σημείο το Ε, στο κάτω διάγραμμα, στη θέση x. Τότε το κύμα φτάνει στο Ε, πριν τη στιγμή που φτάνει στο Κ, κατά ένα χρονικό διάστημα t_4, όπου:

$t_4 = \frac{d}{υ_κ} = \frac{x-0{,}5}{1}$, οπότε η εξίσωση απομάκρυνσης της ταλάντωσης που θα πραγματοποιήσει θα έχει τη μορφή:

$$y = 0{,}2\cdot ημ\left(\frac{2\pi}{T}(t+t_4)\right) = 0{,}2\cdot ημ\left(\frac{2\pi}{2}t + \frac{2\pi}{2}(x-0{,}5)\right)$$

$$\boxed{y = 0{,}2\cdot ημ2\pi\left(\frac{t}{2}+\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right) \text{ (S.I.)} \quad (1)}$$

Βλέπουμε δηλαδή να καταλήγουμε ξανά στην ίδια εξίσωση κύματος. Εννοείται ότι δεν χρειάζεται να κάνουμε διπλή απόδειξη…

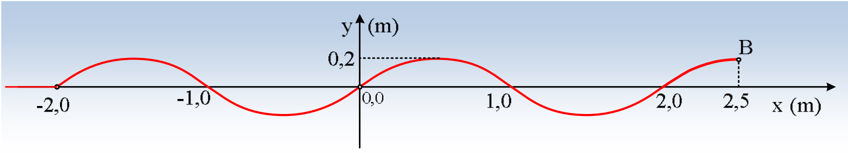
iii) Με αντικατάσταση στην παραπάνω εξίσωση του κύματος t=2,5s παίρνουμε:

$$y = 0{,}2\cdot ημ2\pi\left(\frac{t}{2}+\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right) = 0{,}2\cdot ημ2\pi\left(\frac{2{,}5}{2}+\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right) = 0{,}2\cdot ημ(2{,}5\pi+\pi x-0{,}5\pi) \rightarrow$$

$$y = 0{,}2\cdot ημ(\pi x) \text{ με } x \geq -2 \text{ m, αφού:}$$

$$x \geq x_0 - υ_K\cdot t \text{ ή } x \geq 0{,}5\text{m}-2{,}5\text{m} \text{ ή } x \geq -2 \text{ m}$$

Συνεπώς το στιγμιότυπο είναι μια ημιτονοειδής καμπύλη, όπως στο παρακάτω σχήμα.



iv) α) Αντικαθιστώντας στην εξίσωση του κύματος (1) την τιμή x=2,5m, παίρνουμε για την απομάκρυνση του σημείου Β:

$$y_B = 0{,}2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2}+\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right) = 0{,}2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2}+\frac{2{,}5}{2}-\frac{1}{4}\right) = 0{,}2 \cdot \eta\mu(\pi t + 2\pi)$$

Όπου το σημείο Β άρχισε την ταλάντωση του, πριν τη στιγμή μηδέν κατά χρονικό διάστημα:

$$t_B = \frac{d}{\upsilon} = \frac{2{,}5-0{,}5}{1} s = 2s$$

δηλαδή τη χρονική στιγμή t_B=-2s. Οπότε τελικά για την απομάκρυνσή του έχουμε:

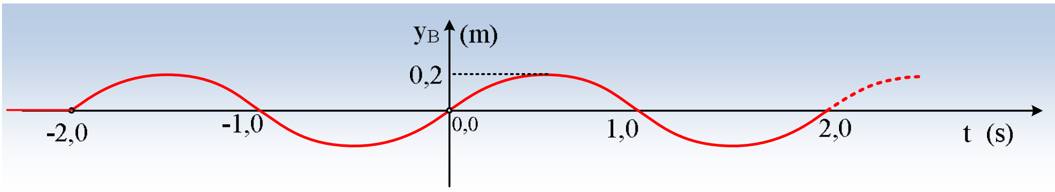
$$y_B = 0{,}2 \cdot \eta\mu(\pi t + 2\pi) \text{ (S.I.) με } t \geq -2s \quad (2)$$

Εναλλακτικά: Αν μηδενίσουμε την φάση της απομάκρυνσης του σημείου Β που βρήκαμε παραπάνω θα βρούμε ότι αυτός ο μηδενισμός προέκυψε τη χρονική στιγμή:

$$\pi t + 2\pi = 0 \rightarrow t = -2s$$

όπου το κύμα έφτασε στο σημείο Β και το έθεσε σε ταλάντωση.

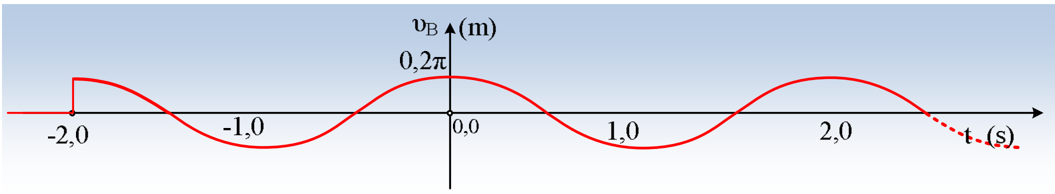
Η γραφική παράσταση της σχέσης (2) θα είναι μια ημιτονοειδής καμπύλη, η οποία με βάση τα παραπάνω, θα έχει την μορφή:



β) Γνωρίζοντας την εξίσωση (2) της απομάκρυνσης για την ταλάντωση του Β, παίρνουμε για την ταχύτητα ταλάντωσης:

$$\upsilon_B = A\omega \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi t + 2\pi) = 0{,}2\pi \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi t + 2\pi) \text{ (S.I.) με } t \geq -2s$$

Μια συνημιτονοειδή καμπύλη με περίοδο Τ=2s, όπως η παρακάτω:



dmargaris@gmail.com