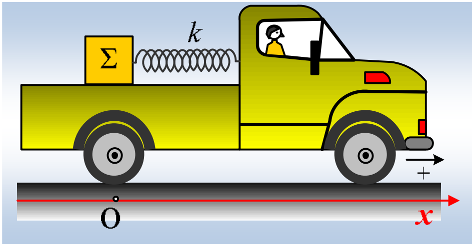
Η ταλάντωση στην καρότσα του φορτηγού.



Ένα σώμα Σ μάζας 2kg είναι δεμένο στο άκρο ενός οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς k=200N/m και βρίσκεται στην λεία καρότσα ενός φορτηγού, όπως στο σχήμα. Με το σύστημα αυτό, μελετάμε τρεις κινήσεις, η μελέτη των οποίων θα γίνει ως προς έναν προσανατολισμένο άξονα x με αρχή το σημείο Ο, σημείο από το οποίο περνά το σώμα Σ τη στιγμή $t_0=0$.

i) Το φορτηγό κινείται προς τα δεξιά με σταθερή ταχύτητα v=2m/s, ενώ το ελατήριο έχει το φυσικό μήκος του.
Να βρεθεί η θέση, η ταχύτητα και η κινητική ενέργεια του σώματος Σ τη στιγμή $t_1=(7\pi/30)s\approx 0{,}7$ s.

ii) Το φορτηγό παραμένει ακίνητο, ενώ το σώμα Σ εκτελεί ΑΑΤ με εξίσωση απομάκρυνσης x=0,2·ημωt (S.I.):

α) Να βρεθεί η θέση, η ταχύτητα και η κινητική ενέργεια του σώματος τη στιγμή t_1.

β) Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ τη χρονική στιγμή $t_2=\pi/4$ s;

iii) Το φορτηγό κινείται προς τα δεξιά με σταθερή ταχύτητα v, ενώ το σώμα Σ πάνω στην καρότσα τίθεται σε ταλάντωση, με την ίδια εξίσωση x=0,2·ημωt (S.I.), ως προς την καρότσα του φορτηγού:

α) Τι τιμές θα πάρουν τώρα η θέση, η ταχύτητα και η κινητική ενέργεια του σώματος τη στιγμή t_1.

β) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της ταχύτητας του Σ σε συνάρτηση με το χρόνο και να υπολογίσετε τη μέγιστη και ελάχιστη κινητική του ενέργεια.

γ) Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ τη χρονική στιγμή t_2;

Σημείωση: Όλα τα παραπάνω μεγέθη θα υπολογιστούν ως προς έναν ακίνητο παρατηρητή στο έδαφος.

Απάντηση:

i) Αφού το σώμα τη στιγμή $t_0=0$ περνά από τη θέση $x_0=0$ και κινείται με σταθερή ταχύτητα, τη στιγμή t_1, θα βρίσκεται στη θέση $x_1 = vt_1 = 2\cdot 0{,}7m = 1{,}4m$, κινούμενο με σταθερή ταχύτητα v=2m/s. Η κινητική του ενέργεια θα είναι ίση:

$$K_1 = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}2\cdot 2^2 J = 4J$$

ii) Το σώμα εκτελεί ΑΑΤ στο άκρο του ελατηρίου με σταθερά επαναφοράς D=k και γωνιακή συχνότητα:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{200}{2}}rad/s = \sqrt{100}rad/s = 10\ rad/s$$

Οπότε η απομάκρυνσή του δίνεται από την εξίσωση $x=0{,}2\cdot\eta\mu(10t)$ (S.I.).

α) Έτσι τη στιγμή t_1, έχουμε:

$$x_1 = 0,2\cdot \eta\mu\left(10\cdot\frac{7\pi}{30}\right)m = 0,2\cdot\eta\mu\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)m = 0,2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}m = 0,1\sqrt{3}m$$

$$\upsilon_1 = A\omega\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega t) = 0,2\cdot 10\cdot\sigma\upsilon\nu\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)m/s = 2\cdot\frac{1}{2}m/s = 1m/s$$

$$K_1 = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 = \frac{1}{2}2\cdot 1^2 J = 1J$$

γ) Για το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ, θα έχουμε:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = \frac{|\Sigma F|\cdot|dx|\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha}{dt} = |\Sigma F|\cdot|\upsilon|\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha \quad (1)$$

Αλλά τη στιγμή t_2 το σώμα Σ βρίσκεται σε απομάκρυνση:

$$x_2 = 0,2\cdot\eta\mu(10t)m = 0,2\cdot\eta\mu\left(10\frac{\pi}{4}\right)m = 0,2m$$

Δηλαδή το σώμα βρίσκεται στην θετική ακραία θέση της ταλάντωσής του, οπότε έχει μηδενική ταχύτητα και:

$$\frac{dK}{dt} = |\Sigma F|\cdot|\upsilon| = 0$$

iii) Η κίνηση του σώματος Σ, μπορεί να θεωρηθεί **σύνθετη**. Μια ευθύγραμμη ομαλή με ταχύτητα v και μια ΑΑΤ με εξίσωση $x=0,2\cdot\eta\mu(10t)$ (S.I.). Αλλά τότε:

α) Με βάση την αρχή της επαλληλίας, θα έχουμε για τη στιγμή t_1:

$$x=x_1+x_2=vt+0,2\cdot\eta\mu(10t) \rightarrow$$

$$x = 2t + 0,2\cdot\eta\mu\left(10\frac{7\pi}{30}\right) = 1,4m + 0,1\sqrt{3}m \approx 1,57m$$

$$\upsilon=\upsilon_1+\upsilon_2=v+2\cdot\sigma\upsilon\nu(10t) = 2m/s + 1m/s = 3m/s, \text{ οπότε:}$$

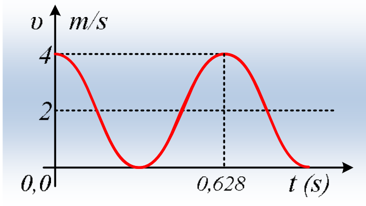
$$K = \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}2\cdot 3^2 J = 9J$$

> Προσέξτε ότι η κινητική ενέργεια **δεν είναι ίση** με το άθροισμα των κινητικών ενεργειών εξαιτίας των δύο παραπάνω κινήσεων, πράγμα που επιβάλλει η αρχή της επαλληλίας για τις θέσεις ή για ταχύτητες και επιταχύνσεις.

β) Με βάση την εξίσωση της ταχύτητας:

$$\upsilon=v+2\cdot\sigma\upsilon\nu(10t) = 2 + 2\cdot\sigma\upsilon\nu(10t),$$

λαμβάνοντας υπόψη ότι ω=2π/Τ ή Τ=0,2π s=0,628s, παίρνουμε την γραφική παράσταση της συνάρτησης υ-t, όπως στο διπλανό σχήμα.



Με βάση και το σχήμα, προκύπτει ότι η μέγιστη ταχύτητα έχει μέτρο 4m/s (στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης), στην οποία αντιστοιχεί μέγιστη κινητική ενέργεια:

$$K_{max} = \frac{1}{2}m\upsilon_{max}^2 = \frac{1}{2}2\cdot 4^2 J = 16J$$

Αντίθετα η ελάχιστη ταχύτητα είναι μηδενική (ξανά στη θέση ισορροπίας αλλά κινούμενο προς την αρνητική κατεύθυνση, όσον αφορά την ταλάντωσή του), οπότε και:

$$K_{min} = \frac{1}{2} m \upsilon_{min}^2 = 0$$

γ) Για το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας, θα ισχύει ξανά η εξίσωση:

$$\frac{dK}{dt} = \left|\Sigma F\right| \cdot \left|\upsilon\right| \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$$

Όπου τη στιγμή t_2 το σώμα (λόγω της ταλάντωσης) βρίσκεται στη θέση:

$$x_2 = 0,2 \cdot \eta\mu\left(10t\right)m = 0,2 \cdot \eta\mu\left(10\frac{\pi}{4}\right)m = 0,2m$$

Δηλαδή σε ακραία θέση ταλάντωσης, οπότε η συνισταμένη δύναμη, δεν είναι άλλη από τη δύναμη επαναφοράς της ταλάντωσης με τιμή:

$$\Sigma F = ma = -kx = -200 \cdot 0,2N = -40 \quad N$$

Ενώ η ταχύτητα έχει φορά προς την θετική κατεύθυνση με μέτρο υ=v, αφού στην ακραία θέση η ταχύτητα ταλάντωσης είναι μηδενική. Με βάση αυτά:

$$\frac{dK}{dt} = \left|\Sigma F\right| \cdot \left|\upsilon\right| \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha = 40 \cdot 2\left(-1\right)J\,/\,s = -80 \quad J/s.$$

dmargaris@gmail.com