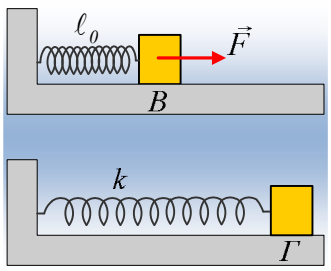
Η ενέργεια στη διάρκεια άσκησης της δύναμης

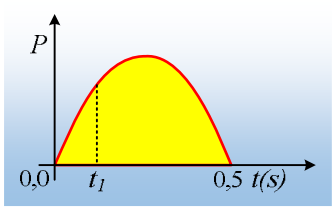


Ένα σώμα μάζας 2kg ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, στη θέση Β, δεμένο στο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k, το άλλο άκρο του οποίου έχει προσδεθεί σε κατακόρυφο τοίχο, όπως στο σχήμα. Κάποια στιγμή t_0=0 ασκούμε στο σώμα μια σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ μέτρου F=16N, μέχρι να φτάσει το σώμα σε μια θέση Γ με μηδενική ταχύτητα, τη στιγμή t_1=0,5s, οπότε και παύουμε να ασκούμε τη δύναμη.

i) Να αποδειχτεί ότι στη διάρκεια της εξάσκησης της δύναμης $\vec{F}$, το σώμα εκτελεί μια αρμονική ταλάντωση, της οποίας να υπολογίσετε το πλάτος A_1 και την περίοδο T_1.

ii) Να υπολογιστεί ο μέγιστος ρυθμός, με τον οποίο μεταφέρεται ενέργεια στο σώμα, μέσω του έργου της ασκούμενης δύναμης F.

iii) Στο διπλανό διάγραμμα δίνεται η ισχύς της ασκούμενης δύναμης F, σε συνάρτηση με το χρόνο.



α) Να υπολογιστεί η ισχύς της δύναμης και ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος τη στιγμή t_1= 1/6 s, κατά την οποία περνά από μια θέση Δ.

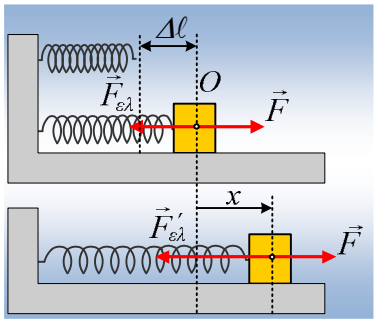
β) Να βρεθεί η ενέργεια που μεταφέρθηκε στο σώμα, μέσω του έργου της δύναμης F, από 0-t_1.

γ) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του κίτρινου χωρίου στο διπλανό διάγραμμα.

iv) Να βρείτε το πλάτος και την ενέργεια της ταλάντωσης που θα πραγματοποιήσει το σώμα, μόλις σταματήσει η δράση της δύναμης $\vec{F}$. Να υπολογιστεί επίσης η κινητική και η δυναμική ενέργεια τη στιγμή που το σώμα περνά ξανά από τη θέση Δ.

Δίνεται $\pi^2 \approx 10$.

Απάντηση:



i) Το σώμα με την επίδραση της δύναμης $\vec{F}$ επιταχύνεται προς τα δεξιά, αλλά τότε το ελατήριο επιμηκύνεται με αποτέλεσμα να ασκεί στο σώμα μια ακόμη δύναμη $\vec{F}_{\varepsilon\lambda}$. Αλλά τότε μετά από λίγο θα φτάσει σε μια θέση ισορροπίας Ο, όπου (βλέπε σχήμα, στο οποίο έχουμε σχεδιάσει μόνο τις οριζόντιες δυνάμεις, για να μην επιβαρυνθεί το σχήμα…):

$$\Sigma F=0 \rightarrow F=F_{\varepsilon\lambda} \rightarrow F=k\cdot\Delta\ell \rightarrow \Delta\ell=\frac{F}{k}$$

Αν πάρουμε τώρα το σώμα σε μια τυχαία θέση, η οποία απέχει κατά x από τη θέση ισορροπίας Ο, θα έχουμε:

$$\Sigma F=F-F'_{\varepsilon\lambda}=F-k\cdot(\Delta\ell+x)=F-k\cdot\Delta\ell-kx=-kx$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι η συνισταμένη δύναμη είναι ανάλογη της απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας και κατευθύνεται προς αυτήν, πράγμα που σημαίνει ότι το σώμα εκτελεί μια ***αρμονική ταλάντωση*** με γύρω από το Ο με περίοδο:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Όμως το χρονικό διάστημα 0-t_1, είναι το χρονικό διάστημα για την μετάβαση του σώματος από την αριστερή ακραία θέση, στην αντίστοιχη δεξιά, οπότε t_1= ½ T_1 ή T_1=1s.

Αλλά τότε $k=m\omega^2=2\cdot(2\pi)^2 N/m=80N/m$, ενώ $\Delta\ell = \frac{F}{k} = \frac{16}{80}m = 0,2m$, οπότε και το πλάτος ταλάντωσης θα είναι $A_1 = \Delta\ell = 0,2m$.

Δεν χαρακτηρίζουμε ως ΑΑΤ την παραπάνω κίνηση, αφού η δύναμη $\vec{F}$ που ασκούμε δεν είναι κάποια συντηρητική δύναμη.

ii) Ο ρυθμός με τον οποίο μεταφέρεται ενέργεια στο σώμα, μέσω του έργου της δύναμης $\vec{F}$ είναι ίσος με την στιγμιαία ισχύ της δύναμης:

$$P_F = \frac{dW}{dt} = \frac{|F|\cdot|ds|\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha}{dt} = |F|\cdot|\upsilon|$$

Αλλά τότε η παραπάνω ισχύς γίνεται μέγιστη, στη θέση ισορροπίας όπου έχουμε και τη μέγιστη ταχύτητα:

$$P_{max} = |F|\cdot|\upsilon| = F\cdot\omega A_1 = F\cdot\frac{2\pi}{T_1}A_1 = 16\cdot\frac{2\pi}{1}\cdot 0,2W \approx 20,1W$$

iii) Η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του Ο, ικανοποιεί την εξίσωση:

$$x=A_1\cdot\eta\mu(\omega t+\varphi_0)$$

Όπου ω=2π/T_1=2π rad/s, ενώ για t=0 έχουμε x=-A_1, οπότε φ_0= 3π/2, οπότε παίρνουμε:

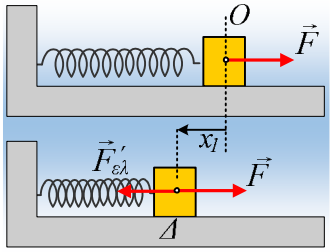
$$x = 0,2\cdot\eta\mu\left(2\pi t + \frac{3\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

Με αντικατάσταση:

$$x_1 = 0,2\cdot\eta\mu\left(2\pi t + \frac{3\pi}{2}\right) = 0,2\cdot\eta\mu\left(2\pi\frac{1}{6} + \frac{3\pi}{2}\right) = -0,1m$$

Ενώ η ταχύτητα του σώματος θα είναι:

$$\upsilon_1 = 0,2\omega\cdot\sigma\upsilon\nu\left(2\pi t + \frac{3\pi}{2}\right) = 0,4\pi\cdot\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\frac{1}{6} + \frac{3\pi}{2}\right) \approx 1,08m/s$$



α) Με βάση τις παραπάνω τιμές, για τη θέση αυτή έχουμε:

$P_F=F\cdot\upsilon_1=16\cdot 1,08W=17,28W$ και

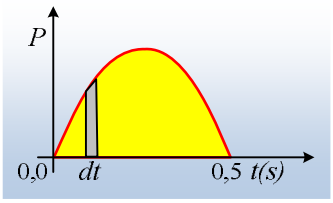
$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{ολ}}{dt} = \frac{|\Sigma F|\cdot|dx|\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha}{dt} = |\Sigma F|\cdot|\upsilon|\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha = |ma|\cdot\upsilon \rightarrow$$

$$\frac{dK}{dt} = m\omega^2 |x_1| \cdot \upsilon = k|x_1| \cdot \upsilon = 80 \cdot 0,1 \cdot 1,08 J/s = 8,64 J/s$$

β) Μέσω του έργου της δύναμης μεταφέρθηκε ενέργεια:

$$W_F = F \cdot s = F \cdot (A_1 - |x_1|) = 16(0,1) J = 1,6 J$$

γ) Στο διάγραμμα P-t, αν πάρουμε ένα στοιχειώδες χρονικό διάστημα, το εμβαδόν του γκρι παραλληλογράμμου (έχουμε απειροελάχιστο dt, οπότε δεχόμαστε σταθερή ισχύ), είναι αριθμητικά ίσο με το αντίστοιχο έργο της δύναμης, αφού:



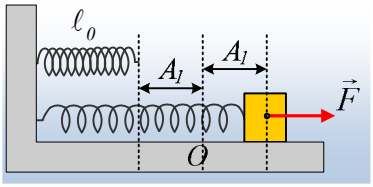
$$P = \frac{dW}{dt} \rightarrow dW = P \cdot dt$$

Αλλά τότε το συνολικό εμβαδόν του κίτρινου χωρίου, θα είναι αριθμητικά ίσο με το συνολικό έργο της δύναμης, δηλαδή ίσο με:

$$W_{o\lambda} = F \cdot s_{o\lambda} = F \cdot 2A_1 = 16 \cdot 2 \cdot 0,2 J = 6,4 J.$$

Συνεπώς το εμβαδόν του χωρίου είναι ίσο με E=6,4m^2.

iv) Μόλις μηδενιστεί η δύναμη $\vec{F}$ το σώμα θα ξεκινήσει μια ΑΑΤ, γύρω από τη θέση ισορροπίας που ταυτίζεται με τη θέση φυσικού μήκος του ελατηρίου, ξεκινώντας από την ακραία δεξιά θέση Γ, η οποία απέχει κατά $A_2=2A_1=0,4$m από την νέα θέση ισορροπίας. Η σταθερά επαναφοράς είναι ξανά ίση με τη σταθερά του ελατηρίου $k=m\omega^2=2\cdot(2\pi)^2 \approx 80$N/m, οπότε η ενέργεια της ταλάντωσης είναι:



$$E_2 = \frac{1}{2} k A_2^2 = \frac{1}{2} 80 \cdot 0,4^2 J = 6,4 J$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η παραπάνω ενέργεια είναι ίση με το έργο της δύναμης F, πράγμα λογικό, αφού στην ουσία είναι αιτία εκτροπής του σώματος από την αρχική θέση ισορροπίας του.

Η δυναμική ενέργεια στη θέση Δ έχει τιμή:

$$U_2 = \frac{1}{2} D x_2^2 = \frac{1}{2} 80 \cdot 0,1^2 J = 0,4 J$$

Ενώ:

$$E_2 = K_2 + U_2 \rightarrow K_2 = E_2 - U_2 = 6,4 J - 0,4 J = 6 J$$

dmargaris@gmail.com