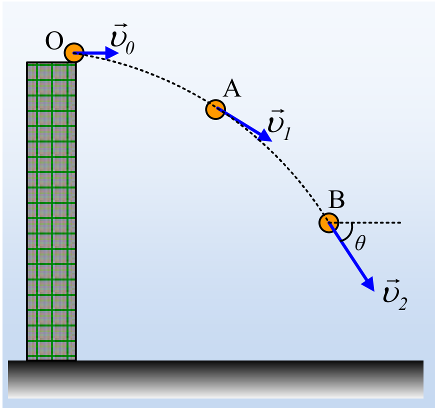
Οριζόντια βολή και έργα



Μια μπάλα εκτοξεύεται από ορισμένο ύψος από το έδαφος, με οριζόντια ταχύτητα υ_0=20m/s τη στιγμή t_0=0. Μετά από λίγο τη στιγμή t_1, περνά από μια θέση Α και τη στιγμή t_2, που η ταχύτητά της σχηματίζει γωνία θ=45° με την οριζόντια διεύθυνση, από τη θέση Β.

i) Να βρεθεί η στιγμή t_2, καθώς και η ταχύτητα υ_2 της μπάλας τη στιγμή αυτή.

ii) Αν κατά την μετακίνηση από το Α στο Β η δυναμική ενέργεια της μπάλας μειώθηκε κατά 60J,

α) να βρεθεί η μεταβολή της κινητικής ενέργειας, μεταξύ των δύο αυτών θέσεων.

β) Να υπολογιστεί το έργο του βάρους από το Α στο Β.

iii) Αν η μάζα της μπάλας είναι m=0,4kg, να υπολογιστούν:

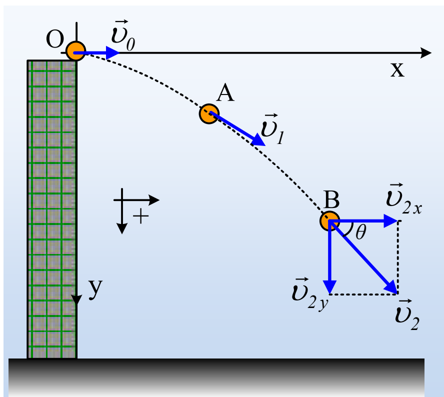
α) Η χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία η μπάλα περνά από το σημείο Α.

β) Οι ρυθμοί μεταβολής της κινητικής ενέργειας της μπάλας, τις στιγμές t_1 και t_2.

γ) Οι αντίστοιχοι ρυθμοί μεταβολής της δυναμικής ενέργειας τις παραπάνω στιγμές.

Δίνεται g=10m/s^2, ενώ η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

Απάντηση:



i) Παίρνουμε ένα σύστημα αξόνων x,y με αρχή το σημείο εκτόξευσης Ο και με τον προσανατολισμό, που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Θεωρώντας την κίνηση της πρώτης μπάλας ως σύνθετη, μια ευθύγραμμη ομαλή στην οριζόντια διεύθυνση και μια ελεύθερη πτώση στην κατακόρυφη, θα έχουμε τις εξισώσεις:

Άξονας x	Άξονας y
$\upsilon_x=\upsilon_0$ (1)	$\upsilon_y=\alpha\cdot t=gt$ (3)
$x=\upsilon_0\cdot t$ (2)	$y=\frac{1}{2}g\cdot t^2$ (4)

Τη στιγμή t_2 οι δυο συνιστώσες υ_{2x} και υ_{2y} έχουν ίσα μέτρα, αφού το ορθογώνιο τρίγωνο είναι και ισοσκελές (αλλιώς το παραλληλόγραμμο των ταχυτήτων είναι τετράγωνο…), οπότε υ_{2y}=20m/s και από την (3) βρίσκουμε:

$$\upsilon_{2y}=gt_2 \rightarrow t_2=\frac{\upsilon_{2y}}{g}=\frac{20}{10}s=2s$$

Ενώ για το μέτρο της ταχύτητας υ_2 έχουμε:

$$\upsilon_2 = \sqrt{\upsilon_{2x}^2 + \upsilon_{2y}^2} = \sqrt{20^2 + 20^2}\,m/s = 20\sqrt{2}\,m/s$$

Το παραπάνω μέτρο της ταχύτητας, θα μπορούσαμε να το βρούμε και καθαρά τριγωνομετρικά, αφού γνωρίζουμε την υ_{2x} και τη γωνία θ, οπότε:

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\upsilon_{2x}}{\upsilon_2} \rightarrow \upsilon_2 = \frac{\upsilon_{2x}}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{20m/s}{\sqrt{2}/2} = 20\sqrt{2}\,m/s$$

ii) Αν από το Α στο Β η δυναμική ενέργεια μειώνεται κατά 60J, αυτό ισοδύναμα δηλώνεται λέγοντας ότι η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας, είναι ΔU_{AB}=-60J.

α) Αν όμως η δυναμική ενέργεια μειώνεται κατά 60J, τότε από τη διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, προκύπτει ότι η κινητική ενέργεια αυξάνεται κατά 60J. Ή ισοδύναμα:

$$\Delta K = +60J.$$

Εναλλακτικά. Από τη στιγμή που στο σώμα ασκείται μόνο με την επίδραση του βάρους, μιας συντηρητικής δύναμης, η μηχανική ενέργεια παραμένει σταθερή. Δηλαδή έχουμε:

$$K+U=\sigma\tau\alpha\theta. \rightarrow \Delta K+\Delta U=0 \rightarrow \Delta K=-\Delta U=-(-60J)=+60J.$$

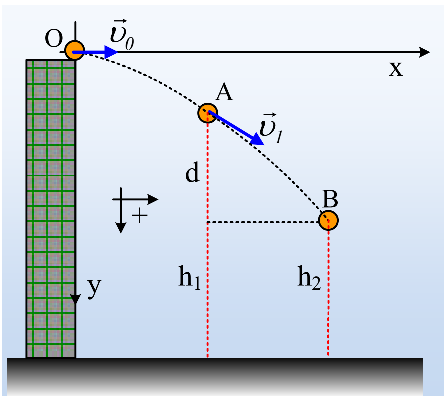
β) Το έργο του βάρους μεταξύ των δύο παραπάνω θέσεων, δεν εξαρτάται από τη διαδρομή, συνδέεται δε με την δυναμική ενέργεια της μπάλας, με τη σχέση:

$$W_w = U_A - U_B = -\Delta U_{AB} = -(-60J) = +60J.$$

Εναλλακτικά. Εφαρμόζοντας ο θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για την μπάλα από το Α στο Β, θα έχουμε:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_w \rightarrow W_w = \Delta K = 60J.$$

iii) Αν θεωρήσουμε ότι η δυναμική ενέργεια της μπάλας είναι μηδενική, όταν βρίσκεται στο έδαφος, τότε $U_A=mgh_1$ και $U_B=mgh_2$, οπότε:



$$\Delta U = U_B - U_A = mg(h_2 - h_1) = -mgd = -mg\cdot\Delta y \rightarrow$$

$$\Delta y = -\frac{\Delta U}{mg} = -\frac{-60}{0{,}4\cdot 10}m = 15m$$

α) Για την κατακόρυφη απομάκρυνση του σημείου Β, από την (4) παίρνουμε:

$$y_2 = ½\, g\cdot t^2 = ½\cdot 10\cdot 2^2 m = 20\text{m}$$

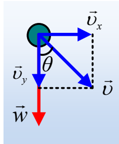
ενώ:

$$\Delta y = y_2 - y_1 \rightarrow y_1 = y_2 - \Delta y = 20m - 15m = 5m$$

και πάλι από την (4) βρίσκουμε:

$$y_1 = \frac{1}{2}gt_1^2 \rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2y_1}{g}} = \sqrt{\frac{2\cdot 5}{10}}s = 1s$$

β) Αν κάποια στιγμή, η ταχύτητα μιας μπάλας σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφη, όπως στο σχήμα, για το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας της μπάλας, θα είχαμε:



$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_w}{dt} = \frac{w\cdot ds\cdot \sigma\upsilon\nu\theta}{dt} = w\cdot\upsilon\cdot\sigma\upsilon\nu\theta = w\cdot\upsilon_y$$

Οπότε τη στιγμή που η μπάλα περνά από τη θέση Α, έχει κατακόρυφη συνιστώσα ταχύτητας:

$$\upsilon_{y1}=gt_1 =10\cdot 1m/s=10m/s,$$

και η κινητική της ενέργεια θα αυξάνεται με ρυθμό:

$$\frac{dK_1}{dt} = mg\cdot\upsilon_{y1} = 0{,}4\cdot 10\cdot 10J/s = 40J/s$$

Ενώ αντίστοιχα τη χρονική στιγμή t_2 που περνά από το σημείο Β, έχει κατακόρυφη συνιστώσα ταχύτητας υ_{2y}=20m/s και ο ρυθμός μεταβολής θα είναι:

$$\frac{dK_2}{dt} = mg\cdot\upsilon_{y2} = 0{,}4\cdot 10\cdot 20J/s = 80J/s$$

γ) Παραπάνω δόθηκε η σχέση μεταξύ των μεταβολών κινητικής και δυναμικής ενέργειας:

$$\Delta K+\Delta U=0 \rightarrow$$

$$\frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} = 0$$

Συνεπώς τη στιγμή t_1:

$$\frac{dU_1}{dt} = -\frac{dK_1}{dt} = -40J/s$$

Αντίστοιχα τη στιγμή t_2:

$$\frac{dU_2}{dt} = -\frac{dK_2}{dt} = -80J/s$$

Στα ίδια αποτελέσματα για τον ρυθμό μεταβολής της δυναμικής ενέργειας, μπορούμε να καταλήξουμε από τη σχέση:

$$W_w=-\Delta U \rightarrow \frac{dU}{dt} = -\frac{dW}{dt} = -w\cdot\upsilon\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha = -w\cdot\upsilon_y$$

dmargaris@gmail.com