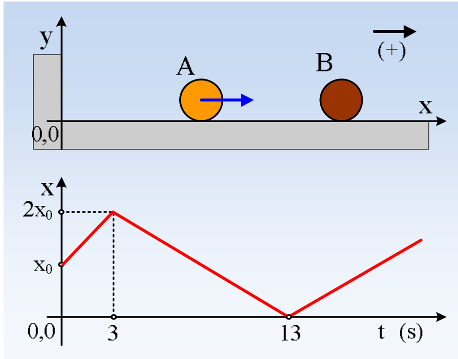
Μια διερεύνηση για πολλαπλές κρούσεις

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμούν δύο σφαίρες Α, Β, της ίδιας ακτίνας και με μάζες m και Μ αντίστοιχα, σε ευθεία x κάθετη σε κατακόρυφο τοίχο. Σε μια στιγμή $t_0=0$, η Α σφαίρα δέχεται στιγμιαίο κτύπημα με τη βοήθεια του οποίου αποκτά ταχύτητα υ_o στη διεύθυνση x. Θεωρώντας ως αρχή ενός άξονα x τη θέση του τοίχου, παίρνουμε το διάγραμμα x(t) του διπλανού σχήματος, για τη θέση της Α σφαίρας.



i) Να περιγράψετε την ακριβή εξέλιξη της κίνησης της Α σφαίρας με βάση το διπλανό διάγραμμα x(t).

ii) Αν όλες οι κρούσεις που συνέβησαν ήταν κεντρικές και ελαστικές, να δικαιολογήσετε γιατί για τις μάζες των δύο σφαιρών ισχύει m < M.

iii) Αν η σφαίρα Α έχει μάζα m=1kg να υπολογιστεί η μάζα Μ της Β σφαίρας.

iv) Να υπολογιστεί η απόσταση των δύο σφαιρών τη χρονική στιγμή t_1=23s, συναρτήσει του x_0.

v) Θα υπάρξει νέα κρούση μεταξύ των δύο σφαιρών μετά τη στιγμή t_1; Αν ναι, να βρείτε:

α) Τη χρονική στιγμή t_2 όπου θα συμβεί αυτό.

β) Τις νέες ταχύτητες των σφαιρών (συναρτήσει του x_0), μετά την κρούση αυτή.

vi) Για ποιες τιμές της μάζας Μ της σφαίρας Β, δεν θα είχαμε δεύτερη κρούση μεταξύ των σφαιρών;

Απάντηση:

i) Αρχικά η Α σφαίρα βρίσκεται στη θέση x_0 και αποκτά ταχύτητα μέτρου υ_0 με φορά προς τα δεξιά. Αυτό το συμπεραίνουμε αφού βλέπουμε το x να αυξάνεται. Στο ίδιο συμπέρασμα μπορούμε να καταλήξουμε αφού στο διάγραμμα x-t η κλίση μας δίνει την ταχύτητα και εδώ έχουμε θετική κλίση dx/dt. Η κίνηση αυτή τελειώνει τη χρονική στιγμή t=3s και στη συνέχει η σφαίρα κινείται προς τα αριστερά, πράγμα που μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι τη στιγμή αυτή είχαμε την σύγκρουση των δύο σφαιρών. Στη συνέχεια μετά από χρονικό διάστημα 10s, συγκρούεται με τον τοίχο (x=0) και ανακλάται κινούμενη ξανά προς τα δεξιά.

ii) Για τις ταχύτητες της σφαίρας Α, πριν και μετά την κρούση της με τη σφαίρα Β έχουμε:

$$\upsilon_0 = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2x_0 - x_0}{\Delta t} = \frac{x_0}{3} \text{ (S.I.) (1) και } \upsilon_1' = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0 - 2x_0}{\Delta t'} = -\frac{2x_0}{10} = -\frac{x_0}{5} \text{ (S.I.) (2)}$$

Βλέπουμε δηλαδή ξανά, ότι η σφαίρα αλλάζει κατεύθυνση κίνησης. Αλλά αν πάρουμε την εξίσωση της ταχύτητας της σφαίρας για την κεντρική ελαστική κρούση μεταξύ των δύο σφαιρών, έχουμε:

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \rightarrow \frac{m-M}{m+M}\upsilon_1 < 0 \rightarrow m < M$$

iii) Αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση τις τιμές των ταχυτήτων από (1) και (2) παίρνουμε:

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \rightarrow \ -\frac{x_0}{5} = \frac{m-M}{m+M}\cdot\frac{x_0}{3} \rightarrow \quad M = 4m = 4kg$$

iv) Κατά την κεντρική ελαστική κρούση της σφαίρας με τον τοίχο, τη στιγμή t΄=13s, η σφαίρα αλλάζει κατεύθυνση ταχύτητας, χωρίς να μεταβάλλεται το μέτρο της. Δηλαδή η σφαίρα θα αποκτήσει ταχύτητα προς τα δεξιά με τιμή:

$$\upsilon_1'' = -\upsilon_1' = -\left(-\frac{x_0}{5}\right) = +\frac{x_0}{5} \text{ (S.I.).}$$

Αλλά τότε μετά από 10s, τη στιγμή t_1=23s θα έχει φτάσει ξανά στην αρχική θέση της Β σφαίρας, στη θέση $x_1=2x_0$. Αντίθετα η Β σφαίρα θα έχει μετακινηθεί προς τα δεξιά κατά $\Delta x_2=\upsilon_2'\cdot\Delta t'$, όπου υ_2' η ταχύτητα μετά την κρούση:

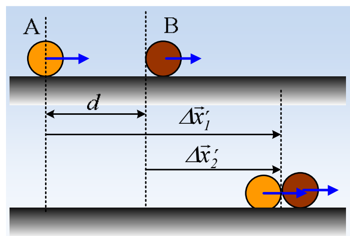
$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1 = \frac{2m}{m+M}\upsilon_0 = \frac{2m}{m+4m}\cdot\frac{x_0}{3} = \frac{2x_0}{15} \quad \text{(S.I.), οπότε:}$$

$$\Delta x_2 = \upsilon_2'(t_1 - 3) = \frac{2x_0}{15}(23-3) = \frac{8x_0}{3}$$

Αλλά τότε, τόση θα είναι και η απόσταση των δύο σφαιρών d= $\Delta x_2 = \dfrac{8x_0}{3}$.

v) Τη στιγμή t_1 βρήκαμε ότι η απόσταση των δύο σφαιρών είναι $d=8x_0/3$, έχοντας ταχύτητες προς τα δεξιά με μέτρα $\upsilon_1'' = \dfrac{x_0}{5} = \dfrac{3x_0}{15}$ και $\upsilon_2' = \dfrac{2x_0}{15}$, δηλαδή $\upsilon_1'' > \upsilon_2'$ οπότε κάποια στιγμή η Α θα προφτάσει τη σφαίρα Β και θα έχουμε δεύτερη κρούση.

α) Έστω ότι η νέα κρούση, θα συμβεί μετά από διάστημα Δt_1, μετά τη στιγμή t_1=23s. Τότε οι μετατοπίσεις των δύο σφαιρών θα είναι:



$$\Delta x_1' = \upsilon_1''\cdot\Delta t_1 = \frac{x_0}{5}\cdot\Delta t_1 \quad (3)$$

$$\Delta x_2' = \upsilon_2'\cdot\Delta t_1 = \frac{2x_0}{15}\cdot\Delta t_1 \quad (4)$$

Αλλά με βάση το διπλανό σχήμα:

$$\Delta x_1' - \Delta x_2' = d \ \rightarrow$$

$$\frac{x_0}{5}\cdot\Delta t_1 - \frac{2x_0}{15}\cdot\Delta t_1 = \frac{8x_0}{3} \ \rightarrow$$

$$\Delta t_1 = 40s$$

Συνεπώς η δεύτερη κρούση μεταξύ των δύο σφαιρών θα συμβεί τη στιγμή:

$$t_2 = t_1 + \Delta t_1 = 23s + 40s = 63s$$

β) Οι νέες ταχύτητες των δύο σφαιρών μετά την δεύτερη μεταξύ τους κρούση είναι:

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1'' + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_2' = \frac{m - 4m}{m + 4m}\cdot\frac{x_0}{5} + \frac{2\cdot 4m}{m + 4m}\cdot\frac{2x_0}{15} = \frac{7}{75}x_0 \ \ (S.I.)$$

$$v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1'' + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_2' = \frac{2m}{m + 4m}\cdot\frac{x_0}{5} + \frac{4m - m}{m + 4m}\cdot\frac{2x_0}{15} = \frac{4x_0}{25} \ \ (S.I.)$$

vi) Με βάση τα παραπάνω, η σφαίρα Α πρόκειται να συγκρουσθεί ή όχι με την Β έχοντας ταχύτητα προς τα δεξιά, με μέτρο ίσο με αυτό που απέκτησε μετά την πρώτη κρούση. Αλλά τότε:

- Αν η Α σφαίρα έχει μεγαλύτερη μάζα από την Β (m>M), τότε η Β σφαίρα αποκτά μεγαλύτερη ταχύτητα από την Α και δεν πρόκειται να έχουμε δεύτερη κρούση. Πράγματι για τις ταχύτητες μετά την πρώτη κρούση θα έχουμε:

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \quad \text{και} \quad \upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1$$

Αλλά αφού $2m_1 > m_1 - m_2$ θα ισχύει πάντα $\upsilon_1' < \upsilon_2'$.

- Αν έχουμε m=M (ίσες μάζες) τότε η Α ακινητοποιείται και δεν έχουμε δεύτερη κρούση.
- Αν m<M για να μην έχουμε δεύτερη κρούση, θα πρέπει το μέτρο της ταχύτητας της Α, μετά την πρώτη κρούση να είναι μικρότερο ή ίσο από το αντίστοιχο μέτρο της ταχύτητας της Β. Θα πρέπει δηλαδή να ισχύει:

$$|\upsilon_1'| \le \upsilon_2' \rightarrow \left|\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right|\upsilon_1 \le \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \rightarrow$$

$$\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \le \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \rightarrow$$

$$3m_1 \ge m_2 \rightarrow m \ge \frac{M}{3}$$

Πράγμα που σημαίνει ότι αν $\frac{M}{3} \le m < M$ δεν θα έχουμε δεύτερη κρούση.

Αλλά τότε η μόνη περίπτωση που απομένει για να έχουμε δεύτερη κρούση, είναι να ισχύει για τις μάζες των δύο σφαιρών η σχέση:

$$m < \frac{M}{3}$$

dmargaris@gmail.com