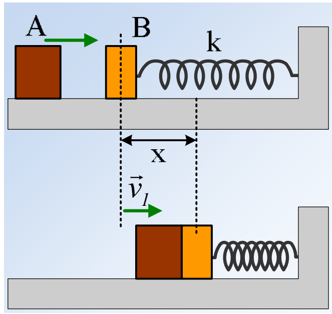
Δύο διαδοχικές ελαστικές κρούσεις.



Τα σώματα Α και Β του σχήματος, με μάζες m_1=4kg και m_2=1kg εμφανίζουν με το οριζόντιο επίπεδο τον ίδιο συντελεστή τριβής ολίσθησης μ=0,5. Το σώμα Β ηρεμεί δεμένο στο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=40N/m, το οποίο έχει το φυσικό του μήκος. Το σώμα Α κινείται κατά μήκος του άξονα του ελατηρίου και φτάνει στο σώμα Β με ταχύτητα u_0=5m/s. Η κρούση που ακολουθεί είναι κεντρική και ελαστική. Μετά την κρούση το σώμα Β συμπιέζει το ελατήριο, ενώ μετά από λίγο ακολουθεί δεύτερη κεντρική και ελαστική κρούση μεταξύ των δύο σωμάτων. Ελάχιστα πριν την $2^η$ κρούση το σώμα Α έχει ταχύτητα μέτρου v_1=1,14m/s, ενώ αμέσως μετά, ταχύτητα μέτρου v_1'=1,32m/s. Ζητούνται:

i) Οι ταχύτητες των δύο σωμάτων αμέσως μετά την πρώτη κρούση.

ii) Η επιτάχυνση κάθε σώματος, όταν το καθένα έχει μετατοπισθεί κατά Δx=0,2m, από τη θέση της πρώτης κρούσης.

iii) Η ταχύτητα του Β σώματος πριν και μετά την $2^η$ κρούση.

iv) Η απόσταση x μεταξύ των θέσεων των δύο κρούσεων.

v) Η απόσταση που διανύει το σώμα Β μεταξύ των δύο κρούσεων.

Δίνεται g=10m/s^2, ενώ τα σώματα θεωρούνται υλικά σημεία αμελητέων διαστάσεων.

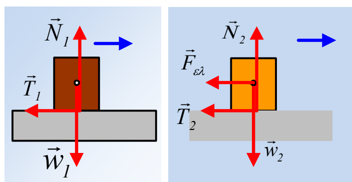
Απάντηση:

i) Οι ταχύτητες των δύο σωμάτων, μετά την μεταξύ τους κεντρική ελαστική κρούση είναι:

$$\upsilon_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_0 = \frac{4-1}{4+1} 5m/s = 3m/s$$

και

$$\upsilon_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_0 = \frac{2 \cdot 4}{4+1} 5m/s = 8m/s$$



ii) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Α, όπου $\Sigma F_y=0$ ή $N_1=m_1 g$, οπότε $T_1=\mu N$. Από το θεμελιώδη νόμο της δυναμικής παίρνουμε:

$$\Sigma F = m_1 \cdot \alpha_1 \rightarrow$$

$$\alpha_1 = \frac{-T_1}{m_1} = \frac{-\mu m_1 g}{m_1} = -\mu g = -0,5 \cdot 10m/s^2 = -5\ m/s^2.$$

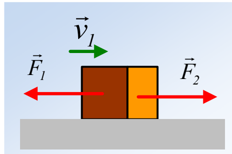
Αντίστοιχα στο σώμα Β ασκούνται οι δυνάμεις του δεύτερου σχήματος.

$$\Sigma F = m_2 \cdot \alpha_2 \rightarrow$$

$$\alpha_2 = \frac{-F_{\varepsilon\lambda} - T_2}{m_2} = \frac{-k \cdot \Delta x - \mu m_2 g}{m_2} = \frac{-40 \cdot 0{,}2 - 0{,}5 \cdot 1 \cdot 10}{1} m/s^2 = -13 m/s^2 .$$

Όπου έχουμε πάρει την προς τα δεξιά κατεύθυνση ως θετική (ίδια με την φορά των ταχυτήτων των δύο σωμάτων), οπότε οι αρνητικές τιμές μας δείχνουν επιταχύνσεις προς τα αριστερά (οπότε τα σώματα επιβραδύνονται).

iii) Στη διάρκεια της δεύτερης κρούσης, ασκούνται μεταξύ των δύο σωμάτων δυνάμεις, όπως στο σχήμα. Αλλά τότε το σώμα Α δεν μπορεί να αυξήσει την προς τα δεξιά ταχύτητά του, οπότε η ταχύτητα v_1' που μας δίνεται θα έχει φορά προς τα αριστερά. Θεωρώντας την προς τα δεξιά φορά ως θετική, έχουμε:



$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \; (\alpha) \quad \text{και} \quad v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 \quad (\beta)$$

Με αντικατάσταση στην (α) βρίσκουμε:

$$-1{,}32 = \frac{4-1}{4+1} 1{,}14 + \frac{2 \cdot 1}{4+1} v_2 \rightarrow v_2 = -5 m/s$$

Πράγμα που σημαίνει ότι ελάχιστα πριν την κρούση, το σώμα Β κινείται προς τα αριστερά, αφού προφανώς προηγουμένως είχε προκαλέσει τη μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου, σταματώντας την προς τα δεξιά του κίνηση. Οπότε με αντικατάσταση στην (β) βρίσκουμε:

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 = \frac{2 \cdot 4}{4+1} 1{,}14 m/s + \frac{1-4}{4+1} (-5) m/s = 4{,}8 m/s.$$

iv) Εφαρμόζοντας το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για το σώμα Α, μεταξύ της θέσης της πρώτης κρούσης και ελάχιστα πριν την δεύτερη, παίρνουμε:

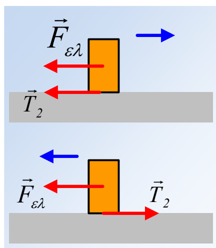
$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{w1} + W_{N1} + W_{T1} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 \upsilon_1^2 = -\mu_1 m_1 g x \rightarrow$$

$$x = \frac{\upsilon_1^2 - v_1^2}{2\mu_1 g} = \frac{3^2 - 1{,}14^2}{2 \cdot 0{,}5 \cdot 10} m = 0{,}77 m$$

Αφού $W_{w1} = W_{N1} = 0$, μιας και οι δυνάμεις είναι κάθετες στη μετατόπιση.

v) Μεταξύ των δύο κρούσεων, το σώμα Β κινήθηκε αρχικά προς τα δεξιά επιβραδυνόμενο, μέχρι κάποια θέση που μηδενίστηκε η ταχύτητά του και στη συνέχεια η δύναμη του ελατηρίου το επιτάχυνε προς τα αριστερά. Και στις δυο αυτές επιμέρους κινήσεις, η τριβή ολίσθησης αντιστέκεται στην κίνηση, οπότε το έργο της θα είναι:



$$W_{T2} = W_1 + W_2 = -T_2 \cdot \Delta l_{max} - T_2 \cdot |\Delta x_2| = -T_2 \cdot (\Delta l_{max} + \Delta x_2) = -T_2 \cdot s.$$

Αντίθετα η δύναμη του ελατηρίου, είναι συντηρητική δύναμη, όπου για τον υπολογισμό του έργου της δεν μας ενδιαφέρει η διαδρομή, αλλά μόνο η αρχική και τελική θέση, αφού:

$$W_{Fελ}=U_{αρχ}-U_{τελ}.$$

Παίρνουμε, μετά από αυτά, το Θ.Μ.Κ.Ε. για το Β σώμα για την κίνησή του μεταξύ των δύο κρούσεων:

$$K_{τελ}-K_{αρχ}=W_{w2}+W_{N2}+W_{T2}+W_{Fελ} \rightarrow$$

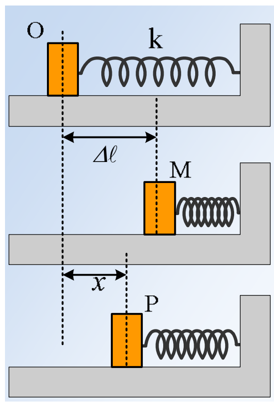
$$\frac{1}{2}m_2 v_2^2-\frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2=-T_2 s+\left(0-\frac{1}{2}kx^2\right)$$

$$s=\frac{m_2\left(\upsilon_2^2-v_2^2\right)-kx^2}{2\mu m_2 g}$$

$$s=\frac{1\left(8^2-5^2\right)-40\cdot 0,77^2}{2\cdot 0,5\cdot 1\cdot 10}m=1,53m$$

Σχόλιο:

Θα μπορούσε κάποιος να υπολογίσει τη μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου, με χρήση του Θ.Μ.Κ.Ε. μεταξύ της θέσης Ο (φυσικού μήκους) και Μ (μηδενική ταχύτητα):



$$K_{τελ}-K_{αρχ}=W_{w2}+W_{N2}+W_{T2}+W_{Fελ} \rightarrow$$

$$0-\frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2=-T_2\cdot \Delta\ell+\left(0-\frac{1}{2}k(\Delta\ell)^2\right)\rightarrow$$

$$20(\Delta\ell)^2+5\Delta\ell-32=0\rightarrow \quad \Delta\ell=1,15m$$

Οπότε $s=\Delta\ell+(\Delta\ell-x)=1,15m+(1,15-0,77)m=1,53m$

dmargaris@gmail.com