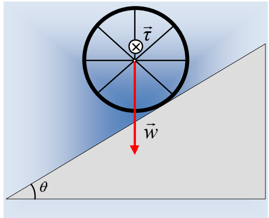
Ο τροχός σε λείο κεκλιμένο επίπεδο



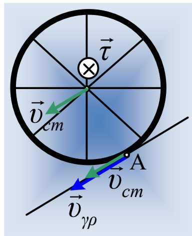
Ένας τροχός, η μάζα του οποίου θεωρείται συγκεντρωμένη στην περιφέρειά του, αφήνεται σε λείο κεκλιμένο επίπεδο κλίσεως θ, ενώ πάνω του ασκείται ένα ζεύγος δυνάμεων με ροπή, όπως στο σχήμα και μέτρου τ=mgR·ημθ, όπου m η μάζα και R η ακτίνα του τροχού.

i) Υποστηρίζεται ότι ο τροχός θα κυλίσει (χωρίς να ολισθήσει) προς τα κάτω. Συμφωνείτε ή διαφωνείτε με την θέση αυτή;

ii) Τη στιγμή που ο τροχός έχει κατέλθει κατακόρυφα κατά h, η κινητική του ενέργεια είναι ίση:

α) K=mgh, β) K=2mgh, γ) K=3mgh.

Απάντηση:



i) Η πρόταση είναι λανθασμένη. Θεωρώντας την κίνηση του τροχού ως σύνθετη, μια μεταφορική και μια στροφική γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το κέντρο του Ο, ας εστιάσουμε στο σημείο Α, επαφής του τροχού με το επίπεδο. Το σημείο Α έχει ταχύτητα λόγω μεταφορικής κίνησης, ίση με υ_{cm} και μια γραμμική ταχύτητα, λόγω κυκλικής κίνησης $\upsilon_{\gamma\rho}=\omega R$, ίδιας κατεύθυνσης, όπως στο σχήμα. Αλλά τότε το σημείο Α έχει μη μηδενική ταχύτητα και ο τροχός ολισθαίνει, κινούμενος προς τα κάτω.

ii) Τη στιγμή που ο τροχός έχει κατέβει κατακόρυφα κατά h, έχει διανύσει απόσταση x=h/ημθ κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου. Για την μεταφορική κίνηση έχουμε:

$$\Sigma F_x=m\cdot\alpha_{cm} \rightarrow mg\cdot\eta\mu\theta=m\cdot\alpha_{cm} \rightarrow \alpha_{cm}=g\cdot\eta\mu\theta \quad (1)$$

$$\textit{Οπότε } x=\tfrac{1}{2}\,\alpha_{cm}\cdot t^2 \textit{ ή } x=\tfrac{1}{2}\,g\cdot\eta\mu\theta\cdot t^2 \quad (2)$$

Για την στροφική κίνηση, θεωρώντας τη δεξιόστροφή ροπή ως θετική, παίρνουμε:

$$\Sigma\tau=I_{cm}\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow \tau=mR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow mgR\cdot\eta\mu\theta=mR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow R\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}=g\cdot\eta\mu\theta \quad (3)$$

Οπότε η κίνηση είναι ομαλά επιταχυνόμενη και κατ' αναλογία με τη μεταφορική κίνηση έχουμε:

$$\varphi=\tfrac{1}{2}\,\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t^2 \quad (4)$$

Με διαίρεση των (2) και (4) κατά μέλη παίρνουμε:

$$\frac{x}{\varphi}=\frac{g\eta\mu\theta}{g\eta\mu\theta/R}=R \rightarrow x=\varphi\cdot R \quad (5)$$

Κατά την παραπάνω κίνηση, το έργο του βάρους μετράει τη μετατροπή της δυναμικής ενέργειας σε μεταφορική κινητική ενέργεια, οπότε $K_{\mu\varepsilon\tau}=\frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2=mgh$. Εξάλλου το έργο της ροπής του ζεύγους, μετράει την ενέργεια που μεταφέρεται στον τροχό και η οποία εμφανίζεται με τη μορφή κινητικής ενέργειας λόγω περιστροφής, οπότε:

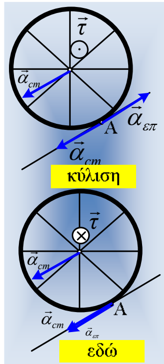
$$K_{περ}=\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2=W_\tau=\tau\cdot\varphi=mgR\cdot\eta\mu\theta\cdot\frac{x}{R}=mg\cdot x\cdot\eta\mu\theta=mgh$$

Άρα ο τροχός απέκτησε κινητική ενέργεια:

$$K=K_{μετ}+K_{περ}=mgh+mgh=2mgh$$

Σωστό το β).

Σχόλια:



1) Αν προσέξουμε τις σχέσεις (1) και (3) διαπιστώνουμε ότι η επιτάχυνση του κέντρου μάζας έχει το ίδιο μέτρο με την επιτρόχια επιτάχυνση του σημείου Α. Έτσι εύκολα κάποιος μπορεί να πει ότι έχουμε κύλιση! Κύλιση θα είχαμε αν οι δυο επιταχύνσεις του σημείου επαφής Α είχαν αντίθετες κατευθύνσεις, όπως στο πάνω σχήμα, ενώ εδώ έχουμε επιταχύνσεις ίδιας κατεύθυνσης (κάτω σχήμα).
2) Στο πρώτο ερώτημα που σχεδιάσαμε τις ταχύτητες του σημείου Α, φαίνεται να ισχύει $υ_{γρ}>υ_{cm}$, πράγμα που δεν είναι σωστό, απλά δεν χρειάστηκε ο υπολογισμός των δύο ταχυτήτων στην απόδειξη και δεν το …γνωρίζαμε. Με βάση την παρακάτω ανάλυση προκύπτει βέβαια ότι αυτές οι δυο ταχύτητες έχουν ίσα μέτρα (όπως και οι αντίστοιχες επιταχύνσεις).
3) Στον υπολογισμό της μεταφορικής και περιστροφικής κινητικής ενέργειας, θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί και το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας…

dmargaris@gmail.com