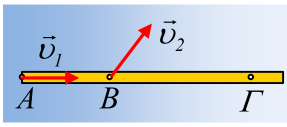
Γιατί το «να κόβεις δρόμο» είναι καλό και για επιταχύνσεις…

Μόνο για Καθηγητές.

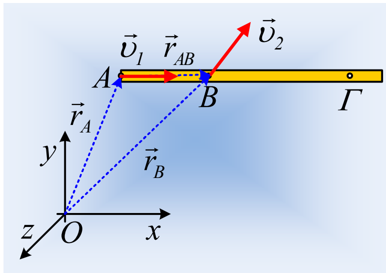


Μια ράβδος ΑΒ κινείται οριζόντια σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Σε μια στιγμή το άκρο Α, έχει ταχύτητα μέτρου υ_1=1m/s, όπως στο σχήμα. Την ίδια στιγμή το σημείο Β, το οποίο απέχει από το Α κατά (ΑΒ)=1m, έχει ταχύτητα υ_2 η οποία σχηματίζει γωνία 45^o με τον άξονα της ράβδου.

Να βρεθεί η ταχύτητα, τη στιγμή αυτή, του σημείου Γ, αν (ΑΓ)=3m;

Απάντηση:

Λίγη θεωρία πρώτα…



Παίρνοντας ένα σύστημα αξόνων, για τις θέσεις των σημείων Α και Β έχουμε:

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{AB}$$

Με παραγώγιση παίρνουμε:

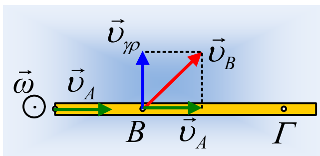
$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{r}_{AB}}{dt} \quad (1)$$

Όμως τα σημεία Α και Β, είναι σταθερά σημεία της ράβδου με σταθερή απόσταση μεταξύ τους και η μεταβολή $d\vec{r}_{AB}$ θα οφείλεται μόνο στην περιστροφή του ευθυγράμμου τμήματος. Αν λοιπόν θεωρήσουμε ότι το διάνυσμα $\vec{r}_{AB}$ στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το άκρο του Α, θα έχουμε ότι:

$$\frac{d\vec{r}_{AB}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}$$

Και η σχέση (1) γίνεται:

$$\vec{\upsilon}_B = \vec{\upsilon}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB} \, (2)$$



Η εξίσωση (2) μας λέει ότι η ταχύτητα του σημείου Β υπολογίζεται ως το διανυσματικό άθροισμα της ταχύτητας του σημείου Α και της «γραμμικής» ταχύτητας του Β, για περιστροφή του με γωνιακή ταχύτητα ω, γύρω από το σημείο Α.

Με άλλα λόγια μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα του σημείου Β, θεωρώντας ότι η κίνηση της ράβδου είναι σύνθετη. Μια μεταφορική με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_A$ και μια περιστροφική με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ γύρω από το σημείο Α!

Έχουμε συνηθίσει να αντιμετωπίζουμε τη σύνθετη κίνηση ως επαλληλία μιας μεταφορικής του κέντρου μάζας με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{cm}$ και μια στροφική με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ γύρω από το άξονα που περνά από το κέντρο μάζας.

Βλέπουμε ότι το ίδιο μπορούμε να κάνουμε και ως προς οποιοδήποτε άλλο σταθερό σημείο της ράβδου!!!

……………………………

Πάμε τώρα στις επιταχύνσεις:

Παραγωγίζοντας την εξίσωση (2) θα έχουμε:

$$\vec{\upsilon}_B = \vec{\upsilon}_A + \vec{\omega}\times\vec{r}_{AB} \rightarrow \frac{d\vec{\upsilon}_B}{dt} = \frac{d\vec{\upsilon}_A}{dt} + \frac{d(\vec{\omega}\times\vec{r}_{AB})}{dt} \rightarrow$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}_{AB} + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}_{AB}}{dt} \quad (3)$$

Ο προσθετέος $\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}_{AB}$ μας δίνει την επιτρόχια επιτάχυνση $\alpha_{επ}=\alpha_{γων}\cdot r$ του σημείου Β για την κυκλική του κίνηση γύρω από το Α και ο προσθετέος $\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}_{AB}}{dt} = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_{AB})$ είναι η γνωστή μας κεντρομόλος $\alpha_κ=\omega^2 r$, αφού:

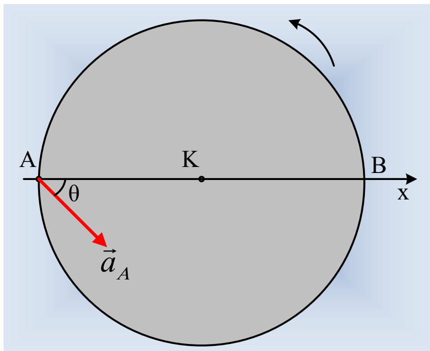
$$\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_{AB}) = (\vec{\omega}\cdot\vec{r}_{AB})\vec{\omega} - (\vec{\omega}\cdot\vec{\omega})\vec{r}_{AB} = 0 - \omega^2\cdot\vec{r}_{AB} = -\omega^2\cdot\vec{r}_{AB}$$

Η εξίσωση (3) δηλαδή μας λέει ότι:

Η επιτάχυνση του τυχαίου σημείου Β μπορεί να υπολογιστεί αν στην επιτάχυνση του σημείου αναφοράς Α, προσθέσουμε διανυσματικά την επιτάχυνση του Β (επιτρόχια και κεντρομόλο) για την κυκλική του κίνηση γύρω από το Α.

Εφαρμογή:

Ένας ομογενής οριζόντιος δίσκος ακτίνας R=1m, κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με την επίδραση κατάλληλης δύναμης F. Κάποια στιγμή που ο δίσκος έχει γωνιακή ταχύτητα ω=1rad/s και γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{γων}$=3rad/s^2, διανύσματα κατακόρυφης διεύθυνσης με φορά προς τα πάνω, το σημείο Α στο άκρο μιας ακτίνας στη διεύθυνση x, έχει επιτάχυνση μέτρου α_A=5m/s^2 η οποία σχηματίζει γωνία θ (ημθ=0,6) με την ακτίνα, όπως στο σχήμα.



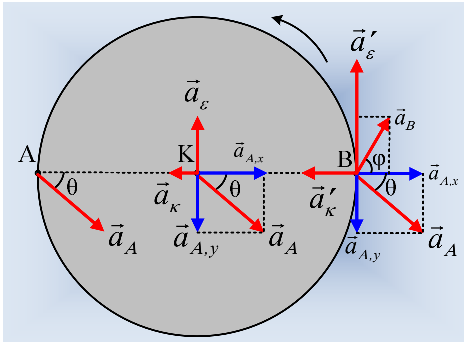
Να υπολογιστούν:

i) Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας Κ του δίσκου

ii) Η επιτάχυνση του αντιδιαμετρικού σημείου Β του δίσκου.

Απάντηση:

i) Θεωρούμε περιστροφή του δίσκου, γύρω από το Α. Τότε το κέντρο Κ του δίσκου, έχει επιτάχυνση το διανυσματικό άθροισμα της $α_Α$ και της επιτάχυνσής του λόγω κυκλικής κίνησης γύρω από το Α. Η επιτάχυνση αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως διανυσματικό άθροισμα της επιτρόχιας με μέτρο $α_{επ}=α_{γων}R=3m/s^2$ και κεντρομόλου μέτρου $α_Κ=ω^2R=1m/s^2$ με φορές όπως στο σχήμα. Αλλά τότε το κέντρο Κ έχει:



$$α_{κ,x}=α_A{\cdot}συνθ-α_κ=5{\cdot}0{,}8m/s^2-1m/s^2=3\ m/s^2.$$

$$Αα_{κ,y}=α_ε-α_A{\cdot}ημθ=3\ m/s^2-5{\cdot}0{,}6\ m/s^2=0$$

Το κέντρο δηλαδή του δίσκου κινείται με επιτάχυνση στη διεύθυνση x, μέτρου 3 m/s^2.

ii) Με την ίδια λογική το σημείο Β, λόγω (υποτιθέμενης) περιστροφής γύρω από το Α έχει κεντρομόλο επιτάχυνση $α_κ'=ω^2{\cdot}2R=2m/s^2$ και επιτρόχια επιτάχυνση $α_ε'=α_{γων}{\cdot}2R=6m/s^2$. Οπότε για την επιτάχυνσή του έχουμε:

$$α_{B,x}=α_A{\cdot}συνθ-α_κ'=5{\cdot}0{,}8m/s^2-2m/s^2=2\ m/s^2.$$

$$α_{B,y}=α_ε'-α_A{\cdot}ημθ=6\ m/s^2-5{\cdot}0{,}6\ m/s^2=3m/s^2.$$

Συνεπώς:

$$α_B=\sqrt{α_{B,x}^2+α_{B,y}^2}=\sqrt{2^2+3^2}m/s^2=\sqrt{13}m/s^2.$$

Με διεύθυνση:

$$εφφ=\frac{α_{B,y}}{α_{B,x}}=\frac{3}{2}$$

Σχόλια.

1) Μπορείτε να δοκιμάσετε και με τον «κλασσικό» τρόπο θεωρώντας σύνθετη κίνηση μεταφορική και περιστροφική γύρω από το κέντρο Κ και να διαπιστώσετε ότι το αποτέλεσμα είναι το ίδιο…

2) Προσοχή όμως στις γενικεύσεις. Αυτά ισχύουν για τις ταχύτητες και τις επιταχύνσεις. Αλλά «να μην χαθεί το μονοπάτι….». Δεν ισχύουν για να εφαρμόσουμε το $2^ο$ νόμο της στροφικής κίνησης. Πότε μπορούμε να εφαρμόσουμε και πότε όχι το $2^ο$ νόμο, μπορείτε να δείτε στην ανάρτηση:

Παίζοντας με το 2ο νόμο για την περιστροφική κίνηση.

dmargaris@gmail.com