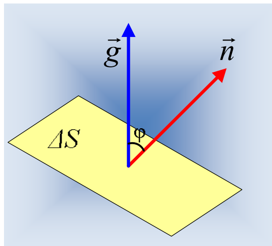
Το βαρυτικό πεδίο της Γης.

Θα μελετήσουμε το βαρυτικό πεδίο της Γης, τόσο στο εξωτερικό της όσο και στο εσωτερικό της, χρησιμοποιώντας τη λογική μελέτης του ηλεκτροστατικού πεδίου, με την βοήθεια της ροής.

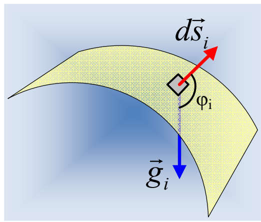
Βαρυτική ροή.



Έστω μέσα σε ένα ομογενές βαρυτικό πεδίο, υπάρχει μια επιφάνεια εμβαδού ΔS. Ορίσουμε την βαρυτική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια αυτή, το μονόμετρο μέγεθος:

$$\Phi = g \cdot \Delta S \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi$$

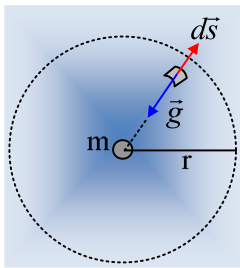
Όπου ΔS το εμβαδόν της επιφάνειας φ η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων της έντασης του βαρυτικού πεδίου $\vec{g}$ και της κάθετης $\vec{n}$ στην επιφάνεια, όπου θα μπορούσαμε να γράψουμε $\Delta\vec{S} = \vec{n}\Delta S$.



Ας τονιστεί ότι, αν το πεδίο δεν είναι ομογενές και η επιφάνεια δεν είναι επίπεδη, τότε θα πρέπει να χωρίσουμε την επιφάνεια σε στοιχειώδεις επιφάνειες, στις οποίες θα θεωρηθεί η ένταση σταθερή, οπότε η ροή θα υπολογίζεται με ολοκλήρωση:

$$\Phi_E = \Sigma(g_i \delta s_i \sigma\upsilon\nu\varphi_i) \text{ ή ορθότερα } \Phi_E = \iint_s g_i \sigma\upsilon\nu\varphi_i ds_i$$

Ο νόμος του Gauss για τη βαρυτική ροή.

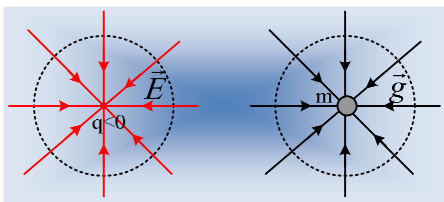


Όπως ακριβώς αποδεικνύουμε το νόμο για το ηλεκτροστατικό πεδίο, μπορούμε να κάνουμε το ίδιο και για μια σημειακή μάζα m.

Θεωρώντας μια σφαιρική επιφάνεια ακτίνας r με κέντρο τη σημειακή μάζα, θα έχουμε:

$$d\Phi = g \cdot ds \cdot \sigma\upsilon\nu 180° = -g \cdot ds = -G\frac{m}{r^2} \cdot ds \longrightarrow$$

$$\Phi_{o\lambda} = -\int G\frac{m}{r^2} \cdot ds = -G\frac{m}{r^2}\int ds = -G\frac{m}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = -4\pi Gm$$



Η παραπάνω σχέση αποτελεί το νόμο του Causs για την βαρυτική ροή σε πλήρη αναλογία με τον αντίστοιχο νόμο για την ηλεκτρική ροή στο ηλεκτροστατικό πεδίο. Αρκεί να δούμε το ηλεκτροστατικό πεδίο γύρω από ένα αρνητικό φορτίο q και το αντίστοιχο βαρυτικό στην περίπτωση σημειακής μάζας.

Πώς γράφεται ο νόμος του Gauss για τα δύο διπλανά πεδία;

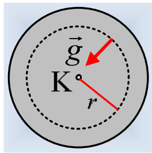
Βαρυτικό πεδίο: $\Phi_{ολ} = -4\pi Gm$

Ηλεκτροστατικό πεδίο: $\Phi_{ολ} = \dfrac{q}{\varepsilon_o} = \dfrac{-|q|}{\dfrac{1}{4\pi K_c}} = -4\pi K_c |q|$

Τι λέτε, υπάρχει καμιά διαφορά (με την τελευταία μορφή του) με το ηλεκτροστατικό πεδίο;

Ας έρθουμε στο εσωτερικό της Γης.

Στα παρακάτω η Γη θεωρείται ομογενής σφαίρα ακίνητη στο διάστημα, μακριά από άλλα ουράνια σώματα…



Να βρεθεί, με εφαρμογή του νόμου Gauss, η ένταση του βαρυτικού πεδίου σε συνάρτηση με την απόσταση r, από το κέντρο της.

Παίρνουμε μια σφαίρα ακτίνας r με κέντρο το κέντρο της Γης. Με εφαρμογή του νόμου Gauss, παίρνουμε:

$$\Phi_{ολ} = -4\pi Gm = g_r \cdot 4\pi r^2 \rightarrow$$

$$g_r = -\frac{Gm}{r^2} \quad (1)$$

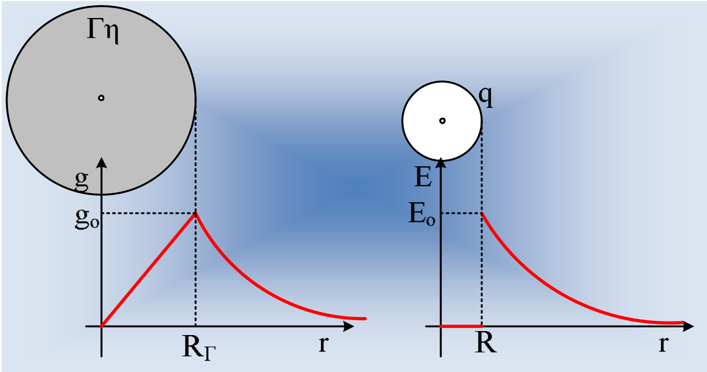
Όπου m η μάζα που περικλείεται στην σφαίρα ακτίνας r. Αλλά από την πυκνότητα της Γης θα έχουμε:

$$\rho = \frac{M_\Gamma}{V_\Gamma} = \frac{m}{V} \rightarrow m = M_\Gamma \frac{4/3\, \pi R_\Gamma^3}{4/3\, \pi r^3} = M_\Gamma \frac{R_\Gamma^3}{r^3} \rightarrow$$

$$g_r = -\frac{GM_\Gamma}{r^2} \cdot \frac{r^3}{R_\Gamma^3} = -\frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma^2} \cdot \frac{r}{R_\Gamma} = -g_o \cdot \frac{r}{R_\Gamma}$$

Όπου το (-) απλά δείχνει την κατεύθυνση του g, δηλαδή το μέτρο της επιτάχυνσης στο εσωτερικό της Γης γράφεται $g_r = g_o \cdot \dfrac{r}{R_\Gamma}$, ενώ g_o η ένταση του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης.

Έτσι παρακάτω δίνεται η γραφική παράσταση του μέτρου της έντασης, σε συνάρτηση με την απόσταση από το κέντρο της Γης (μέχρι το άπειρο) και για να γίνει η σύγκριση, δίνεται δίπλα η αντίστοιχη γραφική παράσταση του μέτρου της έντασης στην περίπτωση μιας φορτισμένης σφαίρας ακτίνας R, όπου η ένταση στο εσωτερικό της είναι μηδενική.

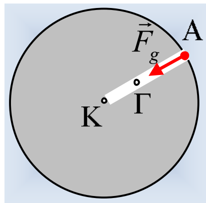


Αν έρθουμε στο δυναμικό;

Το δυναμικό στο χώρο εξωτερικά της Γης, με δεδομένο ότι αυτό μηδενίζεται σε άπειρη από-σταση, δίνεται από τη γνωστή εξίσωση:

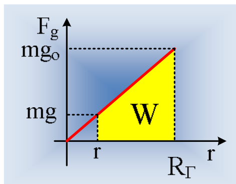
$$V = -G\frac{M_\Gamma}{r}$$

Για να βρούμε τι συμβαίνει στο εσωτερικό της Γης, έστω ότι ένα μικρό σώμα μάζας m, μεταφέρεται από την επιφάνεια της Γης, σημείο Α στο σημείο Γ, σε απόσταση r από το κέντρο της Γης, όπως στο σχήμα.



$$V_A - V_\Gamma = \frac{W_{A\to\Gamma}}{m} \to V_\Gamma = V_A - \frac{W_{A\to\Gamma}}{m} = -G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma} - \frac{W_{A\to\Gamma}}{m}$$

Όμως η ασκούμενη βαρυτική δύναμη είναι μεταβλητή, μέτρου:



$$F_g = mg_r = mg_o \cdot \frac{r}{R_\Gamma}$$

Και το έργο της μπορεί να υπολογιστεί από το διάγραμμα F-r:

$$W_{A\to\Gamma} = \frac{mg + mg_o}{2}(R_\Gamma - r) = \frac{1}{2}mg_o\left(\frac{r}{R_\Gamma} + 1\right)\cdot(R_\Gamma - r) = \frac{mg_o}{2R_\Gamma}\left(R_\Gamma^2 - r^2\right)$$

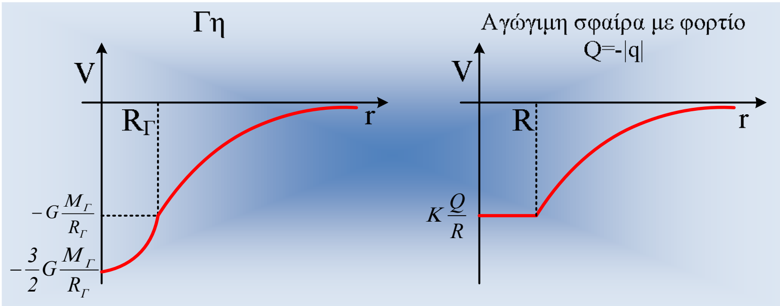
Λαμβάνοντας τώρα υπόψη ότι $g_o = G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma^2}$, παίρνουμε:

$$W_{A\to\Gamma} = \frac{mg_o}{2R_\Gamma}\left(R_\Gamma^2 - r^2\right) = G\frac{M_\Gamma m}{2R_\Gamma} - G\frac{M_\Gamma m}{2R_\Gamma^3}r^2 \text{ και}$$

$$V_\Gamma = -G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma} - \frac{W_{A\to\Gamma}}{m} = -G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma} - G\frac{M_\Gamma}{2R_\Gamma} + G\frac{M_\Gamma}{2R_\Gamma^3}r^2 \to$$

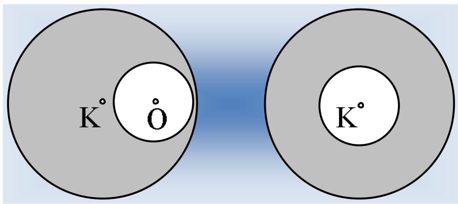
$$V_{\Gamma} = -\frac{3}{2}G\frac{M_{\Gamma}}{R_{\Gamma}} + \frac{1}{2}G\frac{M_{\Gamma}}{R_{\Gamma}^{3}}r^{2}$$

Στο παρακάτω σχήμα παριστάνεται γραφικά το δυναμικό σε συνάρτηση με την απόσταση r, από το κέντρο της Γης. Για σύγκριση, δίπλα δίνεται το δυναμικό για φορτισμένη σφαίρα με ακτίνα R και φορτίο Q<0.



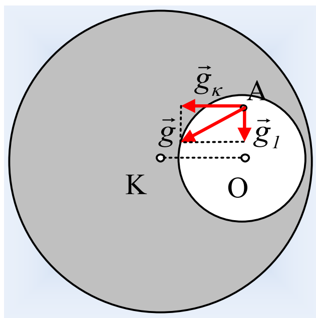
Εφαρμογή 1η:

Αν στο εσωτερικό της Γης, υπάρχει μια σφαιρική κοιλότητα ακτίνας r_1, να υπολογιστεί η ένταση του πεδίου βαρύτητας, στο εσωτερικό της. Να εξεταστούν οι δυο περιπτώσεις, που δείχνονται στο σχήμα:



Όπου στο δεύτερο, το κέντρο της κοιλότητας συμπίπτει με το κέντρο Κ της Γης.

Απάντηση:

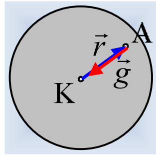


Έστω ένα σημείο Α της κοιλότητας. Η ένταση του πεδίου βαρύτητας στο σημείο Α είναι το διάνυσμα $\vec{g}_\kappa$. Αν η σφαιρική κοιλότητα ήταν πλήρης από το ίδιο υλικό, τότε στο Α θα είχαμε μια ένταση $\vec{g}_1$, όπως στο σχήμα με κατεύθυνση προς το κέντρο Ο της κοιλότητας. Αλλά τότε η ένταση του πεδίου στο Α, χωρίς την κοιλότητα, θα ήταν το διανυσματικό άθροισμα:

$$\vec{g} = \vec{g}_\kappa + \vec{g}_1 \, (1)$$

Ας επιστρέψουμε τώρα στο νόμο του Gauss που είχαμε βρει παραπάνω, αντικαθιστώντας τη μάζα με τη βοήθεια της πυκνότητας.

$$\Phi_{o\lambda} = -4\pi Gm = g_r \cdot 4\pi r^2 \rightarrow$$

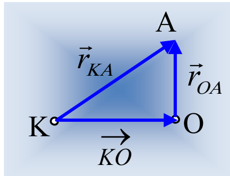


$$-4\pi G\rho\frac{4}{3}\pi r^3 = g_r\cdot 4\pi r^2 \rightarrow g_r = -\frac{4\pi G\rho}{3}r$$

Η παραπάνω εξίσωση γράφεται με διανυσματική μορφή:

$$\vec{g}_r = -\frac{4\pi G\rho}{3}\vec{r}$$

Όπου το (-) μας δείχνει ότι η ένταση έχει αντίθετη φορά από το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$.



Έτσι επιστρέφοντας στη διανυσματική εξίσωση (1) έχουμε:

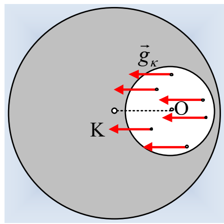
$$\vec{g} = \vec{g}_\kappa + \vec{g}_1 \rightarrow \vec{g}_\kappa = \vec{g} - \vec{g}_1 = -\frac{4\pi G\rho}{3}\vec{r}_{KA} - \left(-\frac{4\pi G\rho}{3}\vec{r}_{OA}\right) \rightarrow$$

$$\vec{g}_\kappa = -\frac{4\pi G\rho}{3}\left(\vec{r}_{KA} - \vec{r}_{OA}\right) = -\frac{4\pi G\rho}{3}\vec{r}_{KO} \ (2)$$

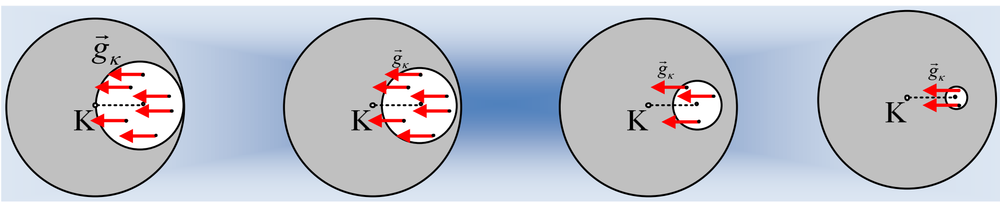
Αφού $\vec{r}_{KO} + \vec{r}_{OA} = \vec{r}_{KA} \rightarrow \vec{r}_{KA} - \vec{r}_{OA} = \vec{r}_{KO}$.

Η εξίσωση (2) μας λέει ότι το διάνυσμα της έντασης του πεδίου $\vec{g}_\kappa$ στο σημείο Α, είναι παράλληλο με το διάνυσμα που συνδέει το κέντρο Κ με το κέντρο της κοιλότητας Ο.

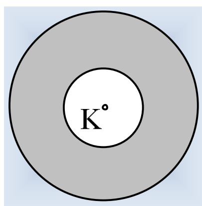
Ας δούμε τι παραπάνω μας λέει η σχέση (2):



1) Σε όλα τα σημεία της κοιλότητας έχουμε την ίδια ένταση του πεδίου βαρύτητας (ισοδύναμα την ίδια επιτάχυνση της βαρύτητας). Έχουμε δημιουργήσει δηλαδή ένα ομογενές βαρυτικό πεδίο!
2) Η ένταση του βαρυτικού πεδίου στην κοιλότητα, δεν εξαρτάται από το πόσο μεγάλη ή μικρή είναι η ακτίνα της κοιλότητας. Δηλαδή στα παρακάτω σχήματα στις κοιλότητες θα έχουμε την ίδια ένταση αρκεί να είναι σταθερή η απόσταση του κέντρου Ο της κοιλότητας από το κέντρο της Γης.

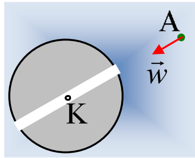


Αξίζει στο σημείο αυτό να γίνει η σύγκριση με το ηλεκτροστατικό πεδίο μιας φορτισμένης κοίλης σφαίρας. Στην περίπτωση αυτή στο εσωτερικό της σφαίρας δεν υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο, είτε η σφαίρα είναι συμπαγής είτε έχει κάποια κοιλότητα…



Αλλά άμεση συνέπεια του παραπάνω, είναι ότι αν το κέντρο της κοιλότητας Ο, συμπέσει με το κέντρο της Γης, τότε η ένταση του πεδίου βαρύτητας στην κοιλότητα, ανάλογη της απόσταση (ΚΟ), μηδενίζεται. Έχουμε δηλαδή έλλειψη βαρύτητας (g=0).

Εφαρμογή 2η:



Ένα μικρό σώμα μάζας m αφήνεται στο σημείο Α, σε ύψος $h=R_Γ$, από την επιφάνεια της Γης. Φτάνοντας στην επιφάνεια, συναντά ένα τούνελ που διαπερνά τη Γη, περνώντας από το κέντρο της Γης, όπως στο σχήμα, εντός του οποίου κινείται χωρίς τριβές.

i) Ποια η μέγιστη ταχύτητα που θα αποκτήσει το σώμα;

ii) Σε ποιο σημείο θα μηδενιστεί η ταχύτητα του σώματος;

Απάντηση:

i) Το βάρος επιταχύνει το σώμα, μέχρι το κέντρο της Γης και το επιβραδύνει στη συνέχεια. Έτσι τη μεγαλύτερη ταχύτητα θα την έχουμε τη στιγμή που περνά από το κέντρο της Γης. Εξάλλου το βάρος είναι συντηρητική δύναμη, οπότε η μηχανική ενέργεια παραμένει σταθερή.

$$K_A+U_A=K_K+U_A \rightarrow$$

$$mV_A= ½\, m\upsilon^2+mV_K \rightarrow$$

$$-G\frac{M_Γ m}{2R_Γ}=\frac{1}{2}m\upsilon_{max}^2-\frac{3}{2}G\frac{M_Γ m}{R_Γ} \rightarrow$$

$$-G\frac{M_Γ m}{2R_Γ}=\frac{1}{2}m\upsilon_{max}^2-\frac{3}{2}G\frac{M_Γ m}{R_Γ} \rightarrow \upsilon_{max}=\sqrt{2G\frac{M_Γ}{R_Γ}}$$

ii) Το σώμα θα σταματήσει σε απόσταση x από το κέντρο της Γης, αφού εξέλθει από το τούνελ. Από τη διατήρηση της ενέργειας παίρνουμε:

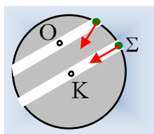
$$K_A+U_A=K_Γ+U_Γ \rightarrow$$

$$mV_A= 0+mV_K \rightarrow$$

$$-G\frac{M_Γ m}{2R_Γ}=-G\frac{M_Γ m}{x} \rightarrow$$

$$x=2R_Γ.$$

Εφαρμογή 3η:



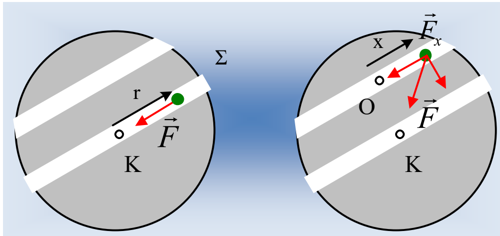
Και αν το παραπάνω σώμα Σ αφεθεί στην είσοδο του τούνελ, σε πόσο χρόνο θα επιστρέψει στην ίδια θέση;

Ένα δεύτερο σώμα $Σ_1$ αφήνεται στην είσοδο ενός τούνελ που δεν περνά από το κέντρο της Γης, ταυτόχρονα με το Σ. Ποιο θα επιστρέψει πρώτο στο σημείο που αφέθηκε; Τριβές δεν υπάρχουν.

Απάντηση:

Έστω το σώμα Σ σε μια θέση που απέχει r από το κέντρο της Γης. Η δύναμη που δέχεται είναι ίση:

$$F = m\vec{g}_r = -mg_o \cdot \frac{\vec{r}}{R_\Gamma}$$



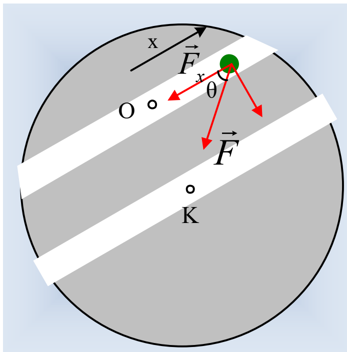
Αλλά τότε το σώμα εκτελεί ΑΑΤ με περίοδο:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{{mg_o}/{R_\Gamma}}} = 2\pi\sqrt{\frac{R_\Gamma}{g_o}}$$

Μπορείτε να αναγνωρίσετε την εξίσωση του απλού εκκρεμούς…

Στο διπλανό σχήμα το σώμα Σ_1 απέχει κατά r από το κέντρο της Γης και κατά x από το μέσον O του τούνελ.

Στη διεύθυνση της κίνησής του έχουμε για το μέτρο της ασκούμενης δύναμης:



$$F_x = F\sigma\upsilon\nu\theta = mg_r\sigma\upsilon\nu\theta = mg_o \cdot \frac{r}{R_\Gamma} \cdot \sigma\upsilon\nu\theta \rightarrow$$

$$F_x = mg_o \cdot \frac{r}{R_\Gamma} \cdot \frac{x}{r} = \frac{mg_o}{R_\Gamma} \cdot x$$

Αν δε, χρησιμοποιήσουμε αλγεβρικές τιμές, η παραπάνω εξίσωση γράφεται:

$$F_x = -\frac{mg_o}{R_\Gamma} \cdot x$$

Οπότε και το Σ_1 εκτελεί ΑΑΤ και μάλιστα με την ίδια περίοδο με το Σ…

Τα σώματα δηλαδή επιστρέφουν ταυτόχρονα στο σημείο που επέστρεψαν μετά από μια περίοδο, η οποία δεν εξαρτάται από το μήκος του τούνελ..

dmargaris@gmail.com