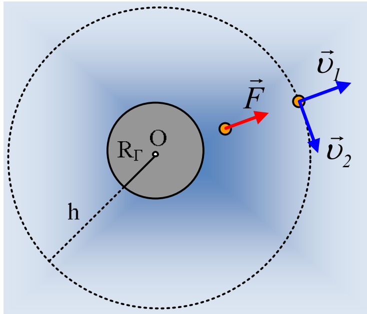
Θέτουμε σε τροχιά ένα δορυφόρο.



Θέλουμε να μεταφέρουμε ένα σώμα μάζας 1tn, σε ύψος από την επιφάνεια της Γης $h=3R_Γ$ και στη συνέχεια να τον θέσουμε σε κυκλική τροχιά, γύρω από το κέντρο της Γης. Υποθέτουμε* ότι αυτό το κάνουμε με εξάσκηση μιας κατάλληλης μεταβλητής δύναμης F, με αποτέλεσμα το σώμα φτάνοντας στο καθορισμένο ύψος να έχει την κατάλληλη κατακόρυφη ταχύτητα. Στη συνέχεια δέχεται κατάλληλη ώθηση (μια μεγάλη δύναμη για λίγο χρόνο) η οποία το θέτει σε κυκλική τροχιά.

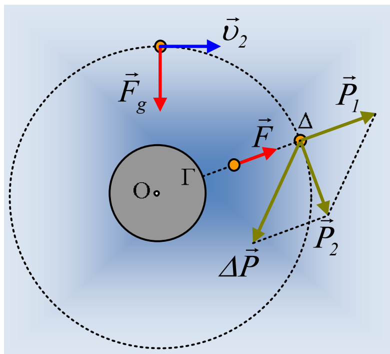
i) Με ποια ταχύτητα υ_1 πρέπει το σώμα να φτάσει στο ύψος h;

ii) Να υπολογιστεί το έργο της δύναμης F.

iii) Να υπολογιστεί η μεταβολή της ορμής του σώματος, η οποία οφείλεται στην ασκούμενη ώθηση, η οποία τροποποιεί την ταχύτητα του σώματος, μετατρέποντάς το σε δορυφόρο.

Η Γη θεωρείται ομογενής σφαίρα, ακίνητη και μακριά από άλλα ουράνια σώματα, χωρίς ατμόσφαιρα, ενώ $g_0=10m/s^2$ και η ακτίνας της ίση με $R_Γ=6.400km$.

Απάντηση:



i) Έστω ότι το σώμα εκτελεί κυκλική κίνηση ακτίνας $r=R_Γ+h=4R_Γ$ γύρω από το κέντρο της Γης Γ. Τότε η βαρυτική έλξη F_g (το βάρος του σώματος) λειτουργεί ως κεντρομόλος δύναμη, δηλαδή ισχύει:

$$F_g = m\frac{\upsilon^2}{r} \rightarrow$$

$$G\frac{M_Γ m}{r^2} = m\frac{\upsilon^2}{r} \rightarrow \upsilon = \sqrt{G\frac{M_Γ}{r}}$$

Όμως στην επιφάνεια της Γης, η ένταση του πεδίου βαρύτητας (ίση με την επιτάχυνση της βαρύτητας) δίνεται από την εξίσωση $g_0 = G\frac{M_Γ}{R_Γ^2} \rightarrow CM_Γ = g_0 \cdot R_Γ^2$, οπότε η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\upsilon_1 = \sqrt{G\frac{M_Γ}{r}} = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R_Γ^2}{4R_Γ}} = \frac{1}{2}\sqrt{g_0 \cdot R_Γ} = \frac{1}{2}\sqrt{10 \cdot 6.400 \cdot 10^3}\, m/s = 4.000 m/s$$

ii) Στη διάρκεια μεταφοράς του σώματος από την επιφάνεια της Γης (θέση Γ) σε ύψος h (θέση Δ), οι ασκούμενες δυνάμεις είναι το βάρος F_g και η ασκούμενη δύναμη F. Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για το σώμα μεταξύ των δύο αυτών θέσεων και έχουμε:

$$K_τ - K_α = W_{F_g} + W_F \rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 - 0 = m(V_Γ - V_Δ) + W_F \rightarrow$$

$$W_F = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 - m\left(-G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma} + G\frac{M_\Gamma}{4R_\Gamma}\right) = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 - m\left(-G\frac{3M_\Gamma}{4R_\Gamma}\right) \rightarrow$$

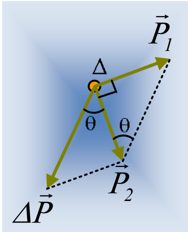
$$W_F = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + G\frac{3M_\Gamma m}{4R_\Gamma} = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{3}{4}\frac{g_0 \cdot R_\Gamma^2 m}{R_\Gamma} = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{3}{4}mg_0R_\Gamma.$$

$$W_F = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{3}{4}mg_0R_\Gamma = \frac{1}{2}1.000 \cdot (4.000)^2 J + \frac{3}{4}1.000 \cdot 10 \cdot 6.400 \cdot 10^3 J = 56 \cdot 10^9 J$$

iii) Η μεταβολή της ορμής του σώματος, η οποία οφείλεται στην αλλαγή της διεύθυνσής της (αντίθετα με το μέτρο της που παραμένει σταθερό), δίνεται από την εξίσωση:

$$\Delta\vec{P} = \vec{P}_{\tau\varepsilon\lambda} - \vec{P}_{\alpha\rho\chi} \rightarrow \Delta\vec{P} = \vec{P}_2 + \left(-\vec{P}_1\right)$$

Όπου με βάση το διπλανό σχήμα, για το μέτρο της μεταβολής της ορμής θα έχουμε (τα διανύσματα $\vec{P}_1$ και $\vec{P}_2$ είναι κάθετα μεταξύ τους):



$$\left|\Delta\vec{P}\right| = \sqrt{\left|\vec{P}_1\right|^2 + \left|\vec{P}_2\right|^2} = \sqrt{2\left|\vec{P}_1\right|^2} = \left|\vec{P}_1\right|\sqrt{2} = m\upsilon_1\sqrt{2} \rightarrow$$

$$\left|\Delta\vec{P}\right| = m\upsilon_1\sqrt{2} = 1.000 \cdot 4.000\sqrt{2} kgm/s = 4\sqrt{2} \cdot 10^6 kgm/s.$$

Αλλά το παραλληλόγραμμο των διανυσμάτων είναι ρόμβος, οπότε το διάνυσμα μεταβολής της ορμής σχηματίζει γωνία θ=45° με την εφαπτομένη της τροχιάς (διεύθυνση της τελικής ορμής.

Σχόλιο:

* Στην πραγματικότητα για να θέσουμε ένα δορυφόρο στην κυκλική τροχιά, αυτός μεταφέρεται από έναν πύραυλο με αρχική μάζα, πολύ μεγαλύτερη του 1tn και καίγοντας καύσιμα αρχίζει να ανέρχεται. Η κίνησή του όμως δεν είναι κατακόρυφη, αλλά πολύ γρήγορα ο πύραυλος γίνεται σχεδόν οριζόντιος, έτσι ώστε να εξουδετερώνει το μεγαλύτερο μέρος του βάρους του, το οποίο παίζει το ρόλο της κεντρομόλου και έτσι «ευκολότερα» να επιταχύνεται και φτάνει στο καθορισμένο ύψος, αφού εκτελέσει κάποιες περιστροφές γύρω από τη Γη.

Στο τελικό ύψος, με λειτουργία των μηχανών, τροποποιείται η τροχιά, ώστε ο δορυφόρος να αποκτήσει την τελική επιθυμητή ταχύτητα (και όσον αφορά το μέτρο και κυρίως την κατεύθυνσή της).

dmargaris@gmail.com